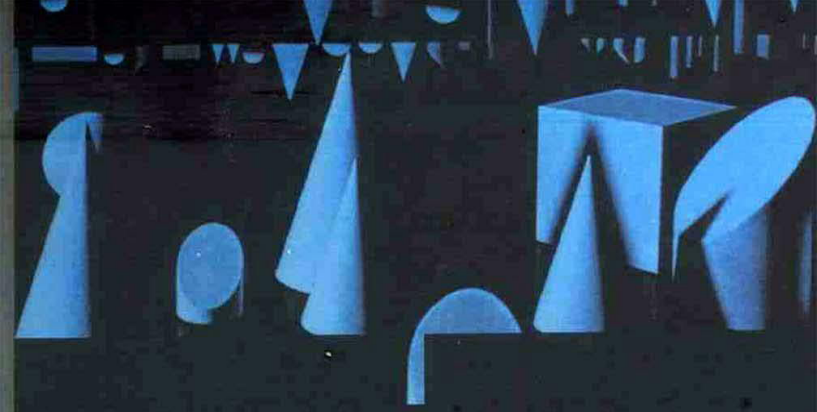


Matemáticas e Imaginación

Edward Kasner
James Newman

Biblioteca
Científica
Salvat

Matemáticas e Imaginación

Edward Kasner / James Newman

SALVAT

Versión española de la obra original norteamericana *Mathematic and Imgination*, publicada por Simon and Schuster de Nueva York.

Revisor: Luis Bou

Escaneado: thedoctorwho1967.blogspot.com
Edición digital: Sargont (2017)

CREATIVE COMMONS

© 1967 Ruth C. Newman
© 1994 Salvat Editores SA
ISBN: 84-345-8880-3 (Obra completa)
ISBN: 84-345-8928-1 (Tomo I)
ISBN: 84-345-8929-X (Tomo II)
Depósito Legal: B-20175/6-1994
Printed in Spain

A R. G., *sin cuya desinteresada ayuda* y *comprensión no hubiera habido libro*

AGRADECIMIENTOS

Estamos agradecidos a muchos libros, que por ser muy numerosos nos vemos imposibilitados de mencionar.

Deseamos expresar particularmente nuestro agradecimiento a Mr. Don Mittleman, de la Columbia University, cuya ayuda en la preparación del original ha sido generosa e inapreciable.

INTRODUCCIÓN

La moda en materia de libros, en las últimas décadas, ha tendido de forma creciente a la ciencia popular. Hasta los periódicos, en sus suplementos dominicales, y las revistas han dado cabida, en sus columnas, a temas relacionados con la relatividad, la física atómica y las más recientes maravillas de la astronomía y de la química. Aunque esto es síntoma del creciente deseo de saber tanto lo que ocurre en los laboratorios y observatorios, como en los cónclaves de hombres de ciencia y de matemáticos, quienes inspiran cierto temor reverente, una gran parte de la ciencia moderna permanece oculta por un velo de misterio aparentemente impenetrable. Predomina la sensación de que la ciencia, al igual que la magia y la alquimia en la Edad Media, es practicada y sólo puede ser comprendida por un reducido y esotérico grupo de personas. El matemático es considerado todavía como el ermitaño que sabe poco de las formas de vida fuera de su celda y que invierte su tiempo creando teorías incomprensibles e increíbles en una jerga extraña, árida e ininteligible.

Sin embargo, las personas inteligentes, hastiadas del ritmo nervioso de su propia existencia —el agudo impacto de los acontecimientos del día— están ávidas de saber algo de los conocimientos adquiridos por vidas más contemplativas y sosegadas, reguladas por un reloj más lento y más acompasado que el suyo propio.

La Ciencia, particularmente la Matemática, aunque parezca menos práctica y menos real que las noticias contenidas en los últimos despachos de los boletines de televisión y radio, parece estar construyendo el único edificio permanente y estable en una época en que todos los demás se desmoronan o vuelan hechos pedazos. Esto no quiere decir que la Ciencia no haya experimentado también cambios revolucionarios. Pero ello ha tenido lugar tranquila y honorablemente. Lo que ha dejado de ser útil, se ha descartado sólo después de una madu-

ra reflexión y el edificio ha sido erigido con constancia sobre las realizaciones creadoras del pasado.

Así, en cierto modo, la popularización de la ciencia es un deber que se debe cumplir, el deber de infundir valor y de proporcionar satisfacciones a todos los hombres y mujeres de buena voluntad que en todas las partes del mundo están perdiendo paulatinamente su fe en la vida de la razón. En la mayoría de las ciencias se ha descorrido gradualmente el velo de misterio, pero las matemáticas, en gran parte, permanecen aún sin divulgar.

Lo que los libros más populares sobre matemáticas han tratado de hacer es: o discutirlas filosóficamente o aclarar las ideas aprendidas alguna vez y ya olvidadas.

Sobre este particular el propósito que nos ha guiado al escribir este libro ha sido algo diferente. Los franceses aplican el término "haute vulgarisation" al feliz resultado que ni desagrada por su condescendencia ni confunde en una masa de verbosidad técnica.

Nuestra finalidad ha consistido en extender el proceso de "haute vulgarisation" de aquellas avanzadas de las matemáticas que se mencionan, si se lo hace, sólo con un murmullo y a las que se alude sólo por su nombre, para demostrar, por su misma variedad, algo del carácter de las matemáticas, de su espíritu osado y libre de trabas y de cómo, en su doble aspecto de arte y ciencia, han continuado guiando a las facultades creadoras más allá aún de la imaginación y de la intuición En la medida que permite un volumen tan reducido sólo puede haber instantáneas y no retratos

No obstante, esperamos que aun en este calidoscopio pueda haber un estímulo para despertar un interés más amplio y un mayor reconocimiento hacia la reina más arrogante del mundo intelectual.

ÍNDICE

TOMO I

I. NOMBRES NUEVOS PARA CONCEPTOS VIEJOS

II. MÁS ALLÁ DE LOS GÚGOLES

III. PIE (π, i, e): TRASCENDENTES E IMAGINARIOS

IV. OTRAS GEOMETRÍAS: EL PLANO Y LA FANTASÍA

V. PASATIEMPOS DE ÉPOCAS PASADAS Y RECIENTES

TOMO II

VI. PARADOJAS PERDIDAS Y PARADOJAS RECUPERADAS

VII. AZAR Y PROBABILIDAD

VIII. GEOMETRÍA DE LA LÁMINA ELÁSTICA

IX. CAMBIO Y MUTABILIDAD: EL CÁLCULO

EPÍLOGO. LA MATEMÁTICA Y LA IMAGINACIÓN

BIBLIOGRAFÍA

«No *iré tan lejos como para afirmar que construir una historia del pensamiento humano sin un profundo estudio de las ideas matemáticas de las sucesivas épocas es como omitir a Hamlet en el drama que recibe su nombre. Eso sería pretender demasiado. Pero es, por cierto, análogo a excluir el papel de Ofelia. Este símil es singularmente exacto, pues Ofelia es esencial al drama, es* muy *encantadora* —y un poco *loca. Admitamos, pues, que el estudio de las matemáticas es una locura divina del espíritu humano, un refugio ante la urgencia aguijoneante de los sucesos contingentes.»*

ALFRED NORTH WHITEHEAD
Science and the Modem World

I. NOMBRES NUEVOS PARA CONCEPTOS VIEJOS

> Así *como de los viejos campos ve el hombre, año tras año, venir el nuevo trigo, del mismo modo, de los viejos libros, viene toda esta nueva ciencia para que el hombre aprenda*
>
> CHAUCER

De cuando en cuando se hace en matemáticas limpieza general. Se desechan algunos conceptos viejos; otros son sacudidos, desempolvados y reparados; finalmente, se asigna lugar y nombre a las teorías nuevas, que son, por así decirlo, nuevas aportaciones al menaje hogareño. Así pues, lo que nuestro título en realidad significa es *palabras* nuevas de las matemáticas; no nuevos nombres, sino palabras nuevas, términos nuevos que vienen, en parte, a designar nociones nuevas, y en parte, a revigorizar conceptos ya conocidos de las matemáticas de tiempos más o menos recientes. Lo mismo que en otras ciencias, seguramente tengan ya las matemáticas demasiadas palabras; tantas, en realidad, que hablar mucho y no decir nada resulta más fácil de lo que debiera. El que la mitad de la población del mundo pueda ser inducida a creer absurdos y santificar burdos errores se debe, sobre todo, a la posibilidad de ensartar palabras, lo mismo que se enhebran las cuentas de un collar. El gran lexicógrafo Frank Vizetelly estimaba que hay en uso en el idioma inglés unas 800.000 palabras. Pero los matemáticos, aunque de ordinario bastante sobrios en sus expresiones, no están satisfechos con estos 800.000 vocablos. Démosles, pues, unos cuantos más.

Mientras avanzamos por el camino de la ciencia podemos irnos pasando sin nombres nuevos, hasta que nos hacemos con nuevas ideas y creamos conceptos nuevos.

Una de las peculiaridades del lenguaje matemático es que no se vale de tantos nombres largos y difíciles de pronunciar

como otras ciencias. Es además un lenguaje conservador, que se apega con firmeza a los vocablos viejos. Los términos empleados por Euclides en sus *Elementos* siguen siendo corrientes hoy en geometría. Pero a uno de los físicos jónicos, el vocabulario de la física moderna le parecería, por hacer un fácil juego de palabras, "griego puro".

En Química, sustancias no más complicadas que el azúcar, el almidón o el alcohol tienen nombres como éstos: ácido metilpropenilenedihidroxicinamenilacrílico o 0-anhidrosulfaminobenzoína o protocatechuicaldehidometileno.

Resultaría muy incómodo tener que emplear tales términos en nuestra conversación diaria ¿Quién podría imaginarse, aun a un aristócrata de la ciencia, en la mesa del desayuno diciendo: "Alcánceme, por favor, el ácido 0-anhidrosulfaminobenzoico", cuando todo lo que necesitaba era azúcar para su café?

La Biología tiene también retorcidos trabalenguas; pero el propósito de estas largas palabras no consiste en asustar a la gente, sino en describir, en forma científicamente concisa, lo que el literato expresaría en media página.

En Matemáticas hay muchas palabras corrientes, tales como "grupo", "familia", "anillo", "curva simple", "límite", etc. Pero a estas palabras comunes se les atribuye, algunas veces, un significado muy particular y técnico. En efecto, he aquí una verdad de Perogrullo: *La matemática es la ciencia que usa palabras sencillas para expresar ideas difíciles.* En esto difiere de cualquier otra ciencia. Existen 500.000 especies conocidas de insectos y cada una de ellas tiene un largo nombre en latín. En las matemáticas somos más modestos. Hablamos de "cuerpos", "grupos", "familias", "espacios", aunque atribuyendo a estas palabras mucho más significado del que las mismas implican en la conversación común. A medida que su uso se hace más y más técnico, nadie puede adivinar el sentido matemático de una palabra, así como uno no podría adivinar por qué una "farmacia"[1] es un lugar donde

[1] En Estados Unidos las *drugstores o* farmacias, expenden además de produc-

venden helados y paraguas. Nadie podría acertar con el significado de la palabra "grupo" tal como se la emplea en matemáticas. Sin embargo, es de tal importancia, que se dictan cursos enteros sobre teoría de "grupos" y se escriben centenares de libros sobre este tema.

Debido a que los matemáticos se las arreglan con palabras comunes, se dan muchas ambigüedades divertidas. Por ejemplo, la palabra "función" expresa probablemente la idea más importante en toda la historia de las matemáticas. Sin embargo, la mayoría de las personas, al oírla, pensarán que una "función" significa un acontecimiento social nocturno, mientras que otras, menos dispuestas socialmente, pensarán en su hígado. La palabra "función" tiene, por lo menos, una docena de significados, pero poca gente sospecha su acepción matemática. Este significado (del cual nos ocuparemos detalladamente más adelante) se expresa, en su forma más simple, con una *tabla*. Dicha tabla da la relación existente entre dos cantidades variables cuando el valor de una de ellas está determinado por el valor de la otra. Así, una cantidad variable puede expresar los años transcurridos desde 1800 hasta 1938, y la otra el número de hombres que en los Estados Unidos usaban bigotes de guías; o una variable puede expresar en decibelios la cantidad de ruido producido por un orador político y la otra las unidades de presión sanguínea de sus oyentes. Usted probablemente no adivinaría jamás el significado de la palabra "anillo" tal como se la emplea en matemáticas, pues fue introducida en el álgebra moderna en los últimos cincuenta años. La teoría de anillos es mucho más reciente que la teoría de grupos. Se la encuentra en la mayoría de los libros de álgebra y nada tiene que ver con compromisos matrimoniales.

Otras palabras comunes empleadas en matemáticas, con un sentido muy particular, son "dominio", "integración", "diferenciación". Un lego jamás podría adivinar lo que representan; sólo los matemáticos lo sabrían. La palabra "trascendente", en matemáticas, no tiene el mismo significado que en

---

tos medicinales, gran variedad de artículos de uso común

filosofía. Un matemático diría. El número π igual a 3,14159... es trascendente, porque no es la raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

Trascendente es nombre muy elevado para un número pequeño; fue inventado cuando se creía que los números trascendentes eran tan raros como los quintillizos. La obra de Georg Cantor en el reino del infinito ha demostrado que, de todos los números de las matemáticas, los trascendentes son los más corrientes, o, para usar el término con un sentido ligeramente distinto; los números trascendentes son los menos trascendentes. Hablaremos de esto último cuando nos refiramos a otro famoso número trascendente, *e*, la base de los logaritmos naturales. Cuando se usa la palabra trascendente, la gente culta podría pensar en la "epistemología trascendente" de Manuel Kant, pero, en ese sentido, nada tiene que ver con las matemáticas.

Por otra parte, tomemos la palabra "evolución", usada en matemáticas para denotar el procedimiento, aprendido por muchos de nosotros en la escuela primaria (y prontamente olvidado), de extraer raíces cuadradas, cúbicas, etc. Spencer, en su filosofía, define la evolución como «una integración de la materia y una disipación del movimiento, desde una homogeneidad indefinida e incoherente a una heterogeneidad definida y coherente», etc. Pero eso, afortunadamente, nada tiene que ver con la evolución matemática.

Como vemos, las matemáticas se valen de palabras simples para expresar ideas complicadas. Ejemplo de palabra simple usada en forma complicada lo da el vocablo "simple". "Curva simple" y "grupo simple" representan conceptos importantes en matemáticas superiores.

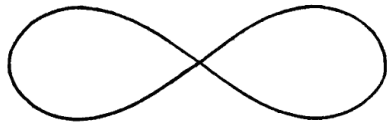


Fig. 1

La curva que aparece en la figura 1, no es una curva simple. Una curva simple es una curva cerrada que no se corta a sí misma, y puede ser como la de la figura 2, por ejemplo Hay muchos teoremas importantes sobre tales figuras que hacen que la palabra valga la pena. Más adelante hablaremos de una extraña clase de matemáticas, llamada "geometría de la lámina elástica", y tendremos mucho más que decir de las curvas simples y no simples. Un matemático francés, Jordán, dio el teorema fundamental: Toda curva simple del plano, tiene un interior y un exterior. Es decir, toda curva simple divide al plano en dos regiones, una, dentro de la curva y otra, fuera de ella.

Fig. 2

Hay en matemáticas ciertos grupos llamados grupos "simples". La definición de "grupo simple" es, realmente, tan difícil, que no puede darse aquí. Si quisiéramos tener una idea clara de lo que es un grupo simple tendríamos que invertir, probablemente, largo tiempo estudiando muchos libros y luego, sin suficientes antecedentes matemáticos, posiblemente no comprenderíamos su verdadero sentido. Antes que nada, tendríamos que definir el concepto de "grupo". Luego tendríamos que dar una definición de "subgrupo" y posteriormente de subgrupo autoconjugado, y sólo entonces estaríamos capacitados para definir qué es un grupo simple. Un grupo simple es, sencillamente, un grupo sin ningún subgrupo autoconjugado —simple, ¿verdad?

A menudo se alude erróneamente a la Matemática como a la ciencia del sentido común, pero la realidad es que puede sobrepasar al sentido común e ir más allá de la intuición y de

la imaginación. Se ha convertido en una materia muy extraña y quizás aterradora, desde el punto de vista ordinario; mas quien penetre en ella se encontrará en un verdadero país de hadas, un país de hadas extraño, pero que tiene sentido, ya que no sentido común. Desde el punto de vista ordinario las matemáticas se ocupan de cosas raras. Le demostraremos a usted que si bien de vez en cuando tratan de cosas extrañas, casi siempre se ocupan de cosas familiares en una forma extraña. Si usted se mira en un espejo normal, sin hacer caso de sus atributos físicos, podrá usted encontrarse risible, pero no extraño: un viaje en subterráneo al parque de atracciones, y una nueva contemplación de su persona en uno de los espejos deformantes le convencerán que, desde otro punto de vista, usted puede ser extraño además de risible. Depende mucho de lo que uno esté acostumbrado a ver. Un campesino ruso, que visitó Moscú por vez primera, asistió a diversos espectáculos públicos. Fue también al zoológico y vio las jirafas. Quizás usted encuentre en su reacción una moraleja, como en las fábulas de La Fontaine: «Mire —dijo—, lo que los bolcheviques han hecho de nuestros caballos.» Eso es lo que las matemáticas modernas han hecho de la aritmética y de la geometría tradicionales.

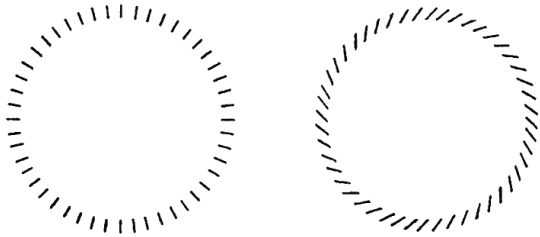


Fig. 3. Turbinas.

Existen otras palabras y expresiones, no tan familiares, que han sido inventadas aún más recientemente. Tómese, por ejemplo, la palabra “turbina”. Por supuesto que la misma ya era empleada en ingeniería, pero en cambio es completamente nueva en geometría. La acepción matemática de esta palabra se aplica a cierto diagrama. (La geometría, contra lo que pue-

dan muchos pensar, se ocupa del estudio de diferentes formas, muchas de ellas hermosas, y que poseen, además, armonía, gracia y simetría. Por supuesto que se han escrito libros voluminosos sobre geometría abstracta y espacio abstracto en los cuales no aparece ni un diagrama, ni siquiera una forma. Constituye ésta una rama muy importante de las matemáticas, pero no es la geometría estudiada por los egipcios y los griegos. La mayor parte de nosotros, si sabemos jugar al ajedrez, nos conformamos con hacerlo sobre un tablero con piezas de madera, pero hay algunas personas que lo juegan con los ojos vendados y sin tocar el tablero. Sería una acertada analogía decir que la geometría abstracta es como el ajedrez a ciegas, es un juego sin objetos concretos.)

La figura anterior representa una turbina, en realidad dos de ellas.

Una turbina consiste en un número infinito de "elementos" insertados con continuidad. Un elemento no es simplemente un punto; es un punto con una dirección asociada — como en una lima de hierro. Una turbina está compuesta por un número infinito de estos elementos, acomodados de una manera particular: los puntos deberán estar dispuestos en un círculo perfecto y la inclinación de los filetes debe formar el mismo ángulo a todo lo largo del círculo. Hay, pues, un número infinito de elementos de igual inclinación con respecto a las tangentes del círculo. ¿Qué sucedería en el caso especial en que el ángulo formado por la dirección de un elementó y la dirección de la tangente fuese igual a cero? Pues que la turbina se convertiría en un círculo. En otras palabras, la teoría de las turbinas es una generalización de la teoría del círculo. Si el ángulo antes citado mide 90°, los elementos señalan hacia el centro del círculo y en ese caso especial estamos ante una turbina normal (véase el diagrama de la izquierda).

Existe una geometría de las turbinas en lugar de una geometría de los círculos. Es una rama relativamente técnica de las matemáticas que se ocupa de la resolución de los grupos continuos de transformaciones relacionadas con ecuaciones diferenciales y con la geometría diferencial. La geometría

relacionada con las turbinas tiene el nombre, algo raro, de "giros y deslizamientos".

El círculo es una de las figuras más antiguas en matemáticas. La línea recta es la línea más simple, pero el círculo es la más simple de las curvas. Se le considera, a menudo, como el límite de un polígono regular, de un número infinito de lados. Usted mismo podrá observar que a medida que se inscribe en un círculo una serie de polígonos, en la que cada uno de éstos tiene más lados que su predecesor, cada polígono tiende a asemejarse más y más a un círculo[2].

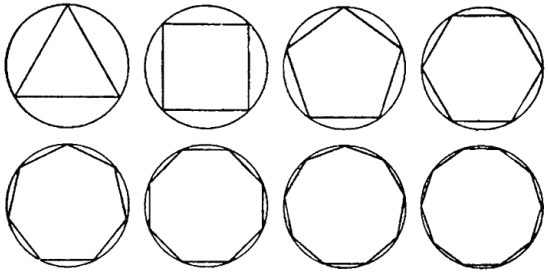


Fig. 4. El círculo como límite de polígonos inscriptos.

Los griegos ya estaban familiarizados con la idea de que, a medida que aumenta el número de lados de un polígono regular, éste difiere cada vez menos del círculo en el cual está inscrito. Realmente, bien podría ser que ante los ojos de un ser omnisciente, el círculo se presentara como un polígono de un infinito número de lados rectilíneos[3]. Sin embargo, a falta de completa omnisciencia, continuaremos considerando al círculo como una curva no recta. Cuando se estudia al círculo desde este punto de vista, surgen algunas interesantes generalizaciones. Existe, por ejemplo, el concepto indicado por la palabra "ciclo", que fue puesta en uso por el matemático

[2] Véase el capítulo sobre Pie.

[3] Véase el capítulo sobre Cambio y Mutabilidad. Sección sobre Curvas Patológicas.

francés Laguerre. Un ciclo es un círculo con una flecha, como éste:

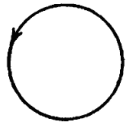


Fig. 5

Si al mismo círculo se le pone una flecha en sentido opuesto, se convertirá en un ciclo diferente.

Los griegos fueron especialistas en el arte de plantear problemas que ni ellos, ni las generaciones de matemáticos que los sucedieron, fueron capaces de resolver. Discutiremos más adelante los tres problemas más famosos de este tipo: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo.

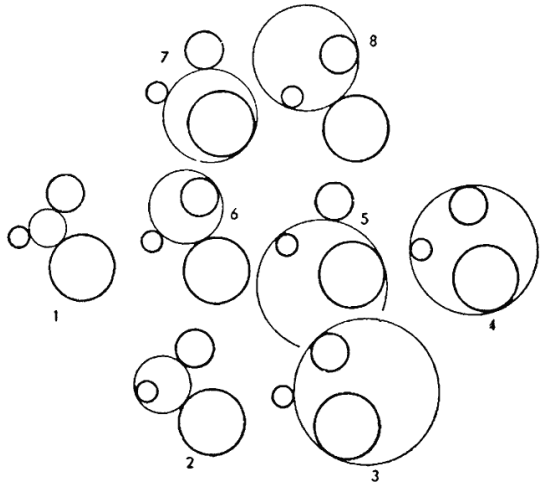


Fig. 6(a). Las ocho soluciones del problema de Apolonio. Cada círculo en trazo fino es tangente a los otros tres dibujados con un trazo más grueso.

Muchos matemáticos bien intencionados, autodesignados y autoungidos, y una gran cantidad de locos y maniáticos,

desconocedores tanto de la historia como de las matemáticas, aportan, cada año, una abundante cosecha de "soluciones" a estos problemas insolubles. Sin embargo, algunos de los problemas clásicos de la antigüedad han sido resueltos. Por ejemplo, la teoría de los ciclos fue empleada por Laguerre en la solución del problema de Apolonio que se enuncia así: Dados tres círculos fijos, hallar otro círculo tangente a los tres. Resulta ser una cuestión de geometría elemental de escuela secundaria, aunque implica inventiva y cualquier estudiante aventajado podría intentar resolverlo. Tiene ocho soluciones, como se indica en la figura 6(a).

Todas ellas pueden construirse con regla y compás y se han encontrado muchos métodos de solución. Dados tres *círculos*, habrá ocho círculos tangentes a ellos. Dados tres *ciclos*, sin embargo, habrá un solo ciclo en el sentido dextrógiro, que sea tangente a los tres. (Se dice que dos ciclos son tangentes entre sí. únicamente si la dirección de sus flechas coincide en el punto de contacto.) De este modo, utilizando el concepto de los ciclos, tenemos una solución definida en lugar de ocho. Con el concepto de ciclo. Laguerre fundó las bases de una elegante teoría.

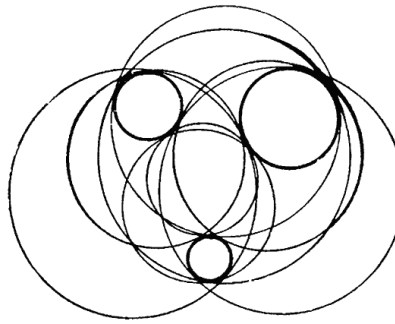


Fig. 6(b). Las ocho soluciones de Apolonio reunidas en un solo diagrama.

Otra variante del círculo, introducida por el eminente matemático norteamericano C. J. Keyser, es la que se obtiene

tomando un círculo y quitándole un punto[4]. Ello supone un cambio conceptual muy serio. Keyser lo denomina un "patocírculo" (de círculo patológico) y lo ha utilizado en la discusión de la lógica de los axiomas.

Aún hemos hecho otra alteración en el concepto de círculo, introduciendo con ello otra palabra y un nuevo diagrama. Tómese un círculo y en lugar de quitarle un punto destáquese uno de ellos como punto inicial. Esto se llamará un "reloj" y ha sido usado en la teoría de funciones poligénicas. "Poligénica" es una palabra adoptada en la teoría de funciones complejas allá por el año 1927. Existía ya una noción importante, la de función monogénica, propiciada en el siglo XIX por el famoso matemático francés Augustin de Cauchy y usada en la teoría clásica de funciones. Se la emplea para indicar funciones que tienen una sola derivada en un punto, como en el cálculo diferencial. Pero la mayor parte de las funciones, en el dominio complejo, tienen un número infinito de derivadas en un punto. Si una función no es monogénica jamás podrá ser bigénica o trigénica. La derivada tiene, o bien un único valor, o un número infinito de valores —será monogénica o poligénica, pero nunca intermedia. Monogénica, implica una única variación de crecimiento; poligénica, en cambio, muchas variaciones. La derivada completa de una función poligénica está representada por una congruencia (un doble infinito) de relojes, todos ellos con distinto punto de origen, pero con la misma rapidez uniforme de rotación. Sería inútil intentar dar una explicación simplificada de estos conceptos. (El neófito tendrá que ser indulgente con nosotros, en algunos breves intervalos como éste, en atención al lector matemático más experimentado.)

[4] N B Éste es un diagrama que el lector tendrá que imaginar, pues escapa a la capacidad de todo impresor el trazar un círculo al que se le ha suprimido un punto. Como el punto carece de dimensiones, nunca sería echado de menos. De ahí que un circulo al que le falte un punto sea puramente conceptual, constituyendo por lo tanto una idea que no puede representarse gráficamente.

El paso ha sido relativamente difícil en el último párrafo, y por si algunas de las olas poligénicas lo han arrastrado al agua, le arrojaremos un salvavidas hexagonal. Podemos pasar a considerar una palabra muy simple, que ha sido utilizada en la geometría elemental para designar cierta clase de hexágono. La palabra sobre la cual deberá usted fijar su atención es "parhexágono". Un hexágono común tiene seis lados arbitrarios. Un parhexágono, por el contrario, es aquel hexágono particular en el cual un lado es a la vez igual y paralelo al lado opuesto (como en la fig. 7).

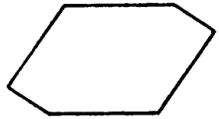


Fig. 7. parhexágono.

Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos se le llama paralelogramo. Con el mismo razonamiento que aplicamos para la palabra parhexágono, podríamos haber llamado "parcuadrágono" a un paralelogramo.

Damos a continuación un ejemplo de un teorema sobre el parhexágono; tómese un hexágono irregular cualquiera, no necesariamente parhexágono, *ABCDEF*. Trácense las diagonales *AC*, *BD*, *CE*, *DF*, *EA* y *FB* formando los seis triángulos, *ABC*, *BCD*, *CDE*. *DEF*, *EFA* y *FAB*. Determínense los seis baricentros; *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'* y *F'* de estos triángulos. (El baricentro, o centro de gravedad de un triángulo, es el punto respecto del cual el triángulo quedaría en equilibrio indiferente si fuese una figura de cartón recortado y estuviese sustentada sólo por ese punto, que, por otra parte, coincide con el punto de intersección de las medianas.) Trácense *A'B'*, *B'C'*, *C'D'*, *D'E'*, *E'F'* y *F'A'* nuevo hexágono interior *A'B'C'D'E'F'* será siempre un parhexágono.

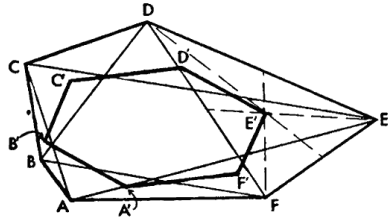


Fig. 8. *ABCDEF* es un hexágono irregular. *A'B'C'D'E'F'* es un parhexágono.

Todos conocen el significado de radical: es decir, raíz cuadrada, cúbica, cuarta, quinta, etc. Combinando con ésta una palabra ya definida, podríamos decir que la extracción de una raíz es la evolución de un radical. La raíz cuadrada de 9 es 3, la raíz cuadrada de 10 es mayor que 3; y la más famosa, a la vez que la más simple de todas las raíces cuadradas, el primer número inconmensurable descubierto por los griegos, la raíz cuadrada de 2 es 1,414... Hay también radicales compuestos —expresiones como: $\sqrt{7+\sqrt[5]{10}}$ +. El símbolo de un radical no es la hoz y el martillo, sino un signo que data de hace tres o cuatro siglos; y el concepto de radical matemático es aún más antiguo. El concepto de "hiperradical" o "ultrarradical", que significa algo superior a un radical, pero inferior a un trascendente, es de origen reciente. Tiene un símbolo especial que veremos a su tiempo. Antes debemos decir unas pocas palabras sobre los radicales en general. Existen ciertos números y funciones en matemáticas que son bien comprendidos. Muchas de las ideas para las cuales no hay representaciones concretas o diagramáticas son difíciles de explicar. La mayoría de las personas no pueden pensar sin palabras; es necesario, pues, darles una palabra y un símbolo para fijar su atención. Caen dentro de esta categoría los términos hiperradical o ultrarradical para los cuales, hasta ahora, no ha habido ni palabras ni símbolos.

Encontramos por primera vez estos ultrarradicales al tratar de resolver ecuaciones de quinto grado. Los egipcios resolvieron las ecuaciones de primer grado hace quizá 4.000 años. Es

decir, encontraron que la solución de la ecuación: ax +b = 0, representada en geometría por una línea recta, es:

$$x = \frac{-b}{a}$$

La ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$ fue resuelta por los hindúes y los árabes, con la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las distintas secciones cónicas, el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola son las representaciones geométricas de las ecuaciones de segundo grado con dos variables.

Luego, en el siglo XVI, los italianos resolvieron las ecuaciones de tercero y cuarto grados, mediante fórmulas explícitas que utilizaban raíces cúbicas y cuárticas. De manera que, allá por el año 1550, pocos años antes del nacimiento de Cervantes, habían sido resueltas las ecuaciones de primero, segundo, tercero y cuarto grados. Hubo luego una pausa de 250 años, porque los matemáticos estaban luchando con la ecuación de quinto grado, la "quíntica general". Finalmente, en los comienzos del siglo XIX, Ruffini y Abel demostraron que las ecuaciones de quinto grado no podían ser resueltas con radicales. La quíntica general no es, pues, como la ecuación cuadrática, cúbica o bien bicuadrática general. Sin embargo, dicha ecuación plantea un problema algebraico, que teóricamente puede ser resuelto mediante operaciones algebraicas. Sólo que estas operaciones son tan difíciles, que no pueden expresarse con los símbolos utilizados para los radicales. Estos nuevos elementos superiores se denominan "ultrarradicales" y también ellos tienen sus símbolos especiales (indicados en la fig. 9).

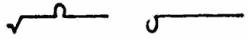


Fig. 9. Un retrato de dos ultrarradicales.

Combinando esos símbolos con los radicales podemos resolver ecuaciones de quinto grado. Por ejemplo, la solución

de: $x^5 + x = a$ podría escribirse $x = \sqrt{a}$ o $x = \sqrt{a}$. La utilidad del nombre y del símbolo especial es manifiesta. Sin ellos, la solución de la ecuación de quinto grado no podría expresarse en forma compacta.

Nos permitiremos dar ahora algunos conceptos algo más fáciles que los que hasta aquí nos han ocupado Estas ideas fueron expuestas, hace algún tiempo, a un cierto número de niños de un jardín de infancia. Fue sorprendente comprobar cuán bien comprendieron todo lo que se les dijo, hasta el punto de que es realmente razonable afirmar que a los niños de jardín de infancia pueden gustarles las disertaciones sobre matemáticas para graduados, siempre que se les presenten en forma clara los conceptos.

Estaba lloviendo y se preguntó a los niños cuántas gotas de lluvia caerían sobre Nueva York. La respuesta más alta fue: 100. Nunca habían contado más allá de 100 y lo que querían decir, al usar dicho número, era simplemente algo muy, muy grande —lo más grande que ellos podían imaginarse. Se les preguntó cuántas gotas de lluvia caían sobre la azotea, cuántas sobre la ciudad de Nueva York y cuántas sobre todo el estado de Nueva York en 24 horas. Pronto tuvieron una noción de la magnitud de estos números aun cuando no conocían los símbolos para representarlos. Al cabo de un rato estaban seguros de que el número de gotas de agua era muchísimo mayor que cien. Se les pidió que pensaran en el número de granos de arena de la playa de Coney Island y determinaron que el número de granos de arena y el de gotas de agua era aproximadamente el mismo. Pero lo importante es que los niños se dieron cuenta de que el número era *finito* y no *infinito*.

A este respecto demostraron su clara superioridad sobre muchos científicos que en el día de hoy aún usan la palabra infinito para indicar algún número grande, como por ejemplo un billón de billones.

Algo que dichos científicos no comprenden, evidentemente, es que el contar es una operación exacta[5]. Puede ser maravillosa, pero no hay nada misterioso ni incierto al respecto. Si se cuenta algo, el resultado que obtendrá será entero y exacto, o estará mal. No existe término medio. Es como coger un avión. O lo alcanza, o lo pierde; y si lo pierde por una fracción de segundo es lo mismo que si hubiese llegado al aeropuerto una semana después de la salida.

Hay una famosa cita que ilustra esto:

> "Cuánto se gana con un poco más
> y ¡cuánto se pierde con un poco menos!"

Un número grande es grande, pero es definido y es finito. Por supuesto que en poesía, lo finito termina alrededor de 3.000; cualquier número mayor es infinito. En muchos poemas, el poeta hablará del número infinito de estrellas, pero si alguna vez hubo una hipérbole, ésta lo es, ya que nadie, ni siquiera el poeta, ha visto alguna vez más de 3.000 estrellas en una noche clara, sin el auxilio de un telescopio.

Para los hotentotes el infinito comienza en tres[6]. Pregúntele a un hotentote cuántas vacas posee y si tiene más de tres responderá "muchas". El número de gotas de lluvia que caen sobre Nueva York es también "muchas". Es un número finito grande, pero no en modo alguno, cercano al infinito.

Pues bien, he aquí el nombre de un número muy grande; Gúgol[7]. Mucha gente diría: "Un gúgol es tan grande que no se puede nombrar o hablar de él, es tan grande que es infinito." Por lo tanto, hablaremos de él, explicando exactamente qué es

---

[5] Nadie afirmaría que 1 + 1 es "casi igual" a 2 Esto es tan disparatado como decir que un billón de billones no es un número finito, simplemente porque es grande Cualquier número que puede ser nombrado o concebido mediante números enteros, es finito *Infinito significa algo completamente diferente*, como lo veremos en el capítulo sobre el gúgol.

[6] Aunque con toda justicia debe señalarse que algunas de las tribus del Congo Belga pueden contar hasta un millón y aún más.

[7] No tiene nada que ver, ni de lejos, con un autor ruso.

y demostrando que pertenece a la mismísima familia que el número 1.

Un gúgol es el número que uno de los niños del jardín de infancia escribió en el pizarrón:

10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.0
00.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.0
00.000.000.000.000.000

La definición de un gúgol es: un 1 seguido de cien ceros. Se resolvió, después de cuidadosas investigaciones matemáticas en el jardín de infancia, que el número de gotas de lluvia que caían en Nueva York, en el término de 24 horas, o en un año, o aun en un siglo, es mucho menor que un gúgol. En realidad, el gúgol es un número más grande que los mayores números usados en física o en astronomía. Todos estos números requieren menos de cien ceros. Si bien es cierto que conocimientos como éste son, por supuesto, asequibles a todo el mundo, parecen constituir, sin embargo, un gran secreto en muchos sectores científicos.

Una publicación científica muy distinguida, apareció con la revelación de que el número de cristales de nieve necesarios para formar la era glacial era un billón a la billonésima potencia. Esto es muy sorprendente, y también muy tonto: Un billón a la billonésima potencia, se escribe así[8]:

$$1.000.000.000^{1.000.000.000}$$

Una apreciación más razonable y un número algo más pequeño, habría sido 10^{30}. En efecto, se ha estimado que si el universo entero, que usted admitirá que es un poquito más grande que la Tierra, estuviese lleno de protones y electrones, de manera que no quedase espacio libre, el número total de protones y electrones sería 10^{110} (es decir un 1 seguido de 110 ceros). Desgraciadamente, tan pronto como la gente habla de números grandes, pierde la chaveta. Parecen hallarse bajo la

[8] Sabido que, en algunos países, se llama billón a mil millones y no a un millón de millones como se hace entre nosotros *(N del R)*.

impresión de que, ya que cero es igual a nada, pueden agregar a un número tantos ceros como les plazca sin que ello traiga consecuencias serias. Tendremos que ser un poco más cuidadosos, pues, al hablar de números grandes.

Volviendo a Coney Island, el número de granos de arena de su playa es aproximadamente igual a 10^{20}. o. en forma más descriptiva: 100.000.000.000.000.000.000. Éste es un número grande, aunque no tanto como el mencionado por la divorciada, en un reciente juicio de divorcio, que había telefoneado que amaba a su esposo "un millón de billones de billones, y ocho veces la vuelta al mundo". Era el mayor número que ella podía concebir y demuestra qué clase de cosas pueden incubarse en un nido de amor.

Si bien la gente habla mucho, la producción total de palabras pronunciadas, desde que comenzó a usarse la palabra, hasta la fecha, incluyendo toda el habla de los niños, los cantos de amor y los debates del Congreso, totaliza aproximadamente 10^{16}. Es decir diez mil billones. Contrariamente a la creencia popular, éste es un número mayor de palabras que el que se habla, en promedio, en una velada de "bridge".

Mucha de la veneración hacia la autoridad de la palabra impresa se desvanecería si uno fuese a calcular el número de palabras que se han impreso desde que apareció la Biblia de Gutenberg. Es un número algo mayor que 10^{16}. Una reciente y popular novela histórica, es la responsable de la impresión de varios cientos de miles de millones de palabras.

El mayor número visto en las finanzas (aunque se están estructurando nuevas marcas) representa la cantidad de dinero en circulación en Alemania en el punto álgido de la inflación. Era menor que un gúgol, simplemente:

496.585.346.000.000.000.000

Un distinguido economista responde por la exactitud de esta cifra. El número de marcos en circulación era casi igual al número de granos de arena de la playa de Coney Island.

El promedio del número de átomos de oxígeno contenidos en un dedal es muchísimo mayor. Estaría representado quizá

por 1.000.000.000.000.000.000.000.000.000. El número de electrones, cuyo tamaño es muchísimo más pequeño que el de los átomos, es mucho más grande. El número de electrones que pasan a través del filamento de una lámpara eléctrica común, de sesenta watts, en el término de un minuto, iguala al número de gotas de agua que caen por las cataratas del Niágara en un siglo.

Uno podría también calcular el número de electrones contenidos, no sólo en una habitación, sino en toda la Tierra y fuera de ella, en las estrellas, en la Vía Láctea y en todas las nebulosas. La razón que nos guía al dar todos estos ejemplos de números muy grandes es destacar el hecho de que, por muy grande que sea el conjunto a contarse, un número finito bastará. Tendremos ocasión de referimos, más adelante, a conjuntos infinitos, pero aquellos que se encuentran en la naturaleza, si bien a veces son muy grandes, son todos, por descontado, finitos.

Un celebrado hombre de ciencia afirmó recientemente, con toda seriedad, que creía que el número de poros (por los cuales respiran las hojas) de todas las hojas, de todos los árboles en todo el mundo, sería, sin duda alguna, infinito. Es innecesario decir que no era un matemático. El número de electrones de una sola hoja es muchísimo mayor que el número de poros de todas las hojas de todos los árboles de todo el mundo, y sin embargo, el número total de electrones, en el universo entero, puede determinarse por medio de la física relativista. Es muchísimo menor que un gúgol —quizás un 1 seguido de 79 ceros. 10^{79} según lo calculado por Eddington.

Palabras de sabiduría pronuncian los niños, por lo menos tan a menudo como los hombres de ciencia. El nombre "gúgol" fue inventado por un niño (sobrino del doctor Kasner. de nueve años de edad), a quien se le pidió que propusiera un nombre para un número muy grande, a saber: un 1 seguido de cien ceros. Estaba muy seguro de que este número no era infinito y, por lo tanto, igualmente en lo cierto de que tenía que tener un nombre. Al mismo tiempo que indicó la palabra "gúgol", sugirió el nombre para otro número aún mayor:

"Gúgolplex". Un gúgolplex es mucho mayor que un gúgol, pero continúa siendo finito, como se apresuró a señalar el inventor de su nombre. Primero se sugirió que un gúgolplex sería un 1 seguido por tantos ceros que uno se cansase de escribirlos. Esto es una descripción de lo que sucedería si uno tratara realmente de escribir un gúgolplex, pero distintas personas se cansan en tiempos diferentes y no consideraríamos a Carnera[9] mejor matemático que al doctor Einstein, sencillamente porque tuviera más resistencia. El gúgolplex es, pues, un número finito determinado, formado por tantos ceros después de la unidad, que el número de ceros sea igual a un gúgol. Un gúgolplex es muchísimo mayor que un gúgol, muchísimo mayor aún que un gúgol de veces un gúgol. Un gúgol de veces un gúgol sería un 1 seguido de doscientos ceros, mientras que un gúgolplex es un 1 con un gúgol de ceros. Usted podrá formarse alguna idea de la magnitud de este número grandísimo, pero finito, por el hecho de que no habría lugar suficiente para escribirlo si usted se dirigiese a la estrella más lejana, recomiendo todas las nebulosas y llenando de cada centímetro de camino.

Cuesta creer que un número tan grande pudiera tener realmente aplicación alguna vez, pero quien así pensara no sería matemático. Un número de la magnitud del gúgolplex podría tener un uso real en problemas de combinaciones. El tipo de problema en el cual podría aparecer científicamente sería el siguiente: Considere que este libro está compuesto de carbono, nitrógeno y otros elementos. La respuesta a la pregunta: ¿Cuántos átomos hay en este libro? sería, por cierto, un número finito, menor aún que un gúgol. Ahora imagínese que el libro está suspendido por un cordel cuyo otro extremo usted sostiene. ¿Cuánto tiempo será necesario esperar antes de que el libro salte hasta su mano? ¿Concibe usted que ello pueda suceder alguna vez? Una respuesta sería: "No, eso jamás ocurrirá, a menos que intervenga alguna fuerza exterior." Pero eso no es correcto. La contestación correcta es que eso suce-

[9] Se hace referencia a un famoso boxeador *(N del R.)*

derá, casi con certeza, en algún momento, antes de que transcurra un gúgolplex de años —quizá mañana.

La explicación de esta respuesta podemos hallarla en la química-física; la mecánica estadística, la teoría cinética de los gases y la teoría de la probabilidad. No podemos desarrollar todos estos temas en unas pocas líneas, pero lo intentaremos. Las moléculas están en perpetuo movimiento. El reposo absoluto de las moléculas implicaría cero grados de temperatura absoluta y esta temperatura no sólo no existe, sino que es imposible de obtener. Todas las moléculas del aire circundante bombardean el libro. Por ahora el bombardeo desde arriba y desde abajo es aproximadamente el mismo y la gravedad ejerce también su acción sobre el libro. Es necesario, pues, esperar el momento favorable en el que un enorme número de moléculas bombardee el libro por debajo y muy pocas por encima. La gravedad será entonces vencida y el libro se elevará. Sería algo similar al efecto conocido en física como movimiento browniano, que describe el comportamiento de las pequeñas partículas en un líquido, que danzan por todos lados debido al impacto de las moléculas. Sería análogo al movimiento browniano, a inmensa escala.

Pero la probabilidad de que esto suceda en un futuro próximo o en cualquier ocasión determinada que podamos mencionar, está comprendida entre 1/gúgol y 1/gúgolplex. En otras palabras, para estar razonablemente seguros de que el libro se elevaría, tendríamos que esperar entre 1 gúgol y 1 gúgolplex de años.

Cuando se hacen trabajos de investigación sobre electrones o sobre problemas de análisis combinatorio, como el del libro, necesitamos números mayores que los usados comúnmente. Por esta razón, nombres como gúgol y gúgolplex, aunque parezcan simples bromas, tienen un valor real. Sus nombres contribuyen a fijar en nuestras mentes el hecho de que todavía estamos tratando con números finitos. Repetimos: un gúgol es 10^{100}; un gúgolplex es 10 elevado a la potencia gúgol, el cual podemos escribir así: $10^{10^{100}} = 10^{\text{gúgol}}$.

Hemos visto que el número de años que habría que esperar para ver el milagro del libro elevándose, sería menor que un gúgolplex. En ese número de años la Tierra bien podría convertirse en un planeta frío y muerto como la Luna, o quizá deshacerse en una cantidad de meteoros y cometas. El verdadero milagro no será que el libro se eleve, pero sí, que con la ayuda de las matemáticas podremos proyectamos en el futuro y pronosticar, con exactitud, *cuándo* probablemente se elevará; es decir, algún día comprendido entre hoy y el año gúgolplex.

Hemos mencionado unos cuantos nombres completamente nuevos en matemáticas —nombres nuevos para conceptos viejos y nuevos.

Existe aún otro nuevo nombre que es conveniente citar antes de concluir. El popular divulgador científico Watson Davis nos ha dado la palabra "Matescopio".

Con el auxilio de los magníficos microscopios y telescopios modernos, el hombre, equidistante entre las estrellas y los átomos se ha aproximado un tanto a ambos. El matescopio no es un instrumento físico, es un instrumento puramente intelectual: la visión, siempre creciente, que las matemáticas proporcionan de ese país de hadas que queda más allá de la intuición y de la imaginación. Los matemáticos, a diferencia de los filósofos, nada dicen acerca de la verdad final, sino que pacientemente, como los constructores de los grandes microscopios y telescopios, pulen sus lentes. En este libro le haremos ver a usted a través de los lentes más nuevos y más poderosos que los matemáticos han pulimentado. ¡Prepárese, pues, para contemplar visiones extrañas a través del matescopio!

II. MÁS ALLÁ DE LOS GÚGOLES

Si no esperáis lo inesperado, no lo encontraréis, dado que es penoso descubrirlo, y *además, difícil.*
HERÁCLITO

Las matemáticas pueden muy bien ser una ciencia compuesta por proposiciones rigurosamente lógicas, organizadas de forma canónica y precisa; pero en sus innumerables aplicaciones tanto sirven de instrumento como de lenguaje para la descripción del número y de la magnitud. Con la misma facilidad, economía y elegancia, tanto permiten describir las órbitas elípticas de los planetas como la forma y dimensiones de esta página o la superficie de un trigal. Nadie puede ver cómo danzan los electrones al girar en torno al núcleo atómico; los telescopios más potentes alcanzan tan sólo a mostrarnos una escasa porción de las distintas estrellas y de los remotos y gélidos rincones del espacio. Pero con ayuda de las matemáticas, y de la imaginación, todo, lo muy pequeño y lo muy grande, puede ser puesto al alcance del hombre.

Contar es hablar el lenguaje de los números. Contar, sea hasta un gúgol, o tan sólo hasta diez, es las dos veces un mismo proceso; hasta el gúgol, más difícil de pronunciar. Lo esencial es comprender que el gúgol y diez son parientes, como lo son electrones y estrellas gigantes. La aritmética, el lenguaje para contar, emparenta a todos, lo mismo en espacio que en tiempo

Para comprender el significado e importancia de las matemáticas, para apreciar su belleza y valor, es preciso, ante todo, comprender la aritmética, pues, en su mayor parte, desde sus comienzos, las matemáticas han sido aritmética, con atavíos más sencillos o complicados. La aritmética ha sido reina y criada de las ciencias desde los tiempos de la astrología caldea y de los hierofantes egipcios hasta nuestros días, los días de la mecánica relativista, la teoría cuántica y el flo-

recer de la informática. Podrán los historiadores disentir sobre el significado de los antiguos papiros, podrán los teólogos argumentar sobre la exégesis de las Escrituras, podrán los filósofos especular sobre las doctrinas pitagóricas, pero todos habrán de convenir en que los números que aparecen en los papiros, en las Escrituras, y las obras pitagóricas son los mismos números que usamos hoy. Las matemáticas, hechas aritmética, han ayudado al hombre a hacer horóscopos y calendarios, a pronosticar las crecidas del Nilo, a medir terrenos, a calcular la altura de las Pirámides, a determinar la velocidad de caída de una piedra al caer desde una cierta torre de Pisa, o de una manzana, al caer de un árbol, en Woolsthorpe; gracias a ella se han podido pesar las estrellas y los átomos, marcar con hitos el correr del tiempo, y hallar la curvatura del espacio. Y aunque el cálculo infinitesimal, la teoría de probabilidades, el álgebra lineal o la topología también sean matemáticas, éstas son aún, en gran medida, el arte de contar.

Todos los lectores de este libro saben contar. Sin embargo, ¿saben qué es contar? Las definiciones que dan los diccionarios recuerdan a la que daba el de Johnson para "red", que rezaba, "una serie de intersticios reticulados". *Saber contar es saber comparar.* Los números son algo muy posterior, como abstracción y artificio que son. Las facultades de contar y comparar son tan connaturales al hombre como sus dedos. Y sin unas y otros, sería muy difícil que hubiese llegado a los números.

Para comparar dos colecciones de objetos y averiguar en cuál hay más y en cuál menos, no se precisa conocer ningún método formal de recuento. Sin saber nada de los números, se puede determinar si dos colecciones de objetos tienen la una tantos elementos como la otra; por ejemplo (salvo accidentes) es fácil demostrar que hay en cada mano igual número de dedos que en la otra: basta juntarlas, y observar su exacto emparejamiento.

Para describir este proceso de emparejamiento, fundamento del contar, los matemáticos utilizan un nombre pintoresco.

Lo llaman "definir una correspondencia biunívoca entre clases", o con lenguaje algo más moderno, "establecer una biyección" entre los conjuntos. En realidad, en ello reside todo el arte de contar, ya lo practiquen pueblos primitivos, nosotros mismos, o Einstein. Con un par de ejemplos lo aclararemos.

En los países donde se practica la monogamia no es necesario contar por separado a los maridos y las mujeres para averiguar el total de personas casadas. Si descontamos el reducido número de bígamos que no acatan la costumbre o la ley, bastará contar a los maridos o a las esposas. Habrá exactamente tantas personas en un conjunto como en el otro. La correspondencia que existe entre ambas clases es biunívoca.

Hay ejemplos más útiles. En un salón están reunidas muchas personas; hay que darle asiento a todas. El problema es si habrá sillas suficientes, o si sobrarán o faltarán. Costaría trabajo contar las sillas, y más aún, las personas. En este caso sería trabajo perdido. En los jardines de infancia, los niños suelen jugar a "Ir a Sevilla". En la sala, llena de niños, hay una silla de menos. A una señal, cada niño corre a ocupar una silla: quien quede sin ella "se va a Sevilla", y es eliminado. Se retira entonces una silla, y el juego continúa. He aquí la solución de nuestro problema. Basta pedir a las personas del salón que tomen asiento. Si todos logran sentarse, y no quedan sillas vacías, es evidente que habrá tantas sillas como personas. Con otras palabras, sin conocer ni el número de personas ni el de sillas, se sabe que este número es el mismo. Las dos clases, la de sillas y la de personas, son iguales en número, dado que hay entre ellas una correspondencia biunívoca, o "uno a uno", como también se dice. A cada persona le corresponde una silla, y recíprocamente, cada silla, tiene asignada una persona.

No es otro el procedimiento que se emplea para contar una colección de objetos cualesquiera. Por una parte está el conjunto de objetos a contar; por otra, una colección que siempre tenemos a mano. Esta colección es el conjunto de los números enteros positivos, los "números naturales", que por convenio,

consideramos vienen ordenados del modo siguiente: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,... Emparejando, en correspondencia "uno a uno", los elementos de la primera clase con los números naturales, experimentamos un fenómeno que no por corriente es menos maravilloso, a saber, que el último número natural utilizado para completar el emparejamiento indique *cuántos* elementos hay.

Para aclarar la idea de contar partimos de la suposición, de la que no hay garantía, de que el concepto de número es comprendido por todo el mundo. El concepto de número puede parecer intuitivamente claro, pero no obstante, se requiere una definición precisa. Si bien la definición puede parecer peor remedio que la enfermedad, no es tan difícil como parece a primera vista. Léala cuidadosamente y verá que es, al mismo tiempo, explícita y económica.

Dada una clase *C*, que contiene ciertos elementos, es posible encontrar otras clases, tales que los elementos de cada una de ellas puedan ser emparejados, uno a uno, con los elementos de *C*. (Cada una de estas clases es así llamada "equivalente a *C'* ".) Todas estas clases, incluyendo a *C*. cualquiera que sea el carácter de sus elementos, participan de una propiedad común: todas ellas tienen el mismo *número cardinal*, que se denomina *número cardinal* de la clase *C* [10].

Entonces, el número cardinal de la clase *C* es el *símbolo* que representa el conjunto de todas las clases que pueden ponerse en correspondencia biyectiva con *C*. Por ejemplo, el número 5 es simplemente el nombre, o símbolo, asignado al conjunto de todas las clases, cada una de las cuales puede ponerse en correspondencia biyectiva con los dedos de una mano.

De aquí en adelante podemos referimos sin ambigüedad al número de elementos de una clase como al número cardinal

[10] Distinguimos a los números cardinales de los números *ordinales*, ya que éstos denotan la relación de un elemento en una clase con respecto a los otros, con referencia a un sistema de orden. Así hablamos del *primer* Faraón de Egipto, o del *cuarto* número entero en su orden usual, o del *tercer* día de la semana, etc. Éstos son ejemplos de ordinales.

de dicha clase, o más brevemente, como "su cardinalidad". La pregunta: "¿Cuántas letras hay en la palabra *matemáticas?"* equivale a preguntar: "¿Cuál es la cardinalidad de la clase cuyos elementos son las letras de la palabra *matemáticas?"* Empleando el método de correspondencia biyectiva, el siguiente gráfico contesta la pregunta e ilustra el método:

M	A	T	E	M	A	T	I	C	A	S
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Es evidente ahora que este método no es ni extraño ni misterioso; no fue inventado por los matemáticos para hacer que algo natural y fácil parezca antinatural y difícil. Es el método empleado cuando contamos nuestras monedas o nuestros pollos, es el método apropiado para contar cualquier clase, no importa qué tan grande, desde diez hasta un gúgolplex —y más allá.

Pronto nos referiremos al "más allá" cuando volvamos a ocuparnos de las clases que no son finitas. En realidad trataremos de *medir nuestro conjunto de medida:* los números naturales. Por lo tanto, es preciso comprender a fondo las correspondencias uno-a-uno, pues nos aguarda una revelación sorprendente: los conjuntos infinitos también pueden contarse, y por los mismísimos medios. Pero antes de intentar contarlas practiquemos con algunos números muy grandes —grandes, pero no infinitos.

"Gúgol" ha sido ya incorporado a nuestro vocabulario. Es un número grande: un 1 seguido de cien ceros. Mayor aún es el gúgolplex: un 1 seguido de un gúgol de ceros. La mayor parte de los números que se encuentran en la descripción de la naturaleza son mucho más pequeños, aunque algunos pocos son mayores.

En la ciencia moderna suelen aparecer números enormes. Sir Arthur Eddington sostiene que hay, no aproximadamente

sino exactamente, 136×2^{256} protones[11], e igual número de electrones, en el Universo. Aunque no es fácil de imaginar, este número, como símbolo escrito en el papel, ocupa poco lugar. Ni siquiera es tan grande como el gúgol y queda completamente empequeñecido ante el gúgolplex. Sin embargo, el número de Eddington, el gúgol y el gúgolplex, son finitos.

Un verdadero gigante es el número de Skewes: mucho mayor aún que el gúgolplex. Sirve para indicar la distribución de los números primos[12] y se escribe así:

$$10^{10^{10^{34}}}$$

O, por ejemplo, el número total de jugadas posibles en un juego de ajedrez, que es:

$$10^{10^{50}}$$

Y hablando de ajedrez, como señaló el eminente matemático inglés G. H. Hardy, si imaginamos al Universo entero como un tablero de ajedrez, a los protones que hay en él como piezas de dicho juego, y si convenimos en llamar "jugada", en este juego cósmico, a cualquier intercambio en la posición de dos protones, el número total de jugadas posibles, por una extraordinaria coincidencia, sería el número de Skewes:

$$10^{10^{10^{34}}}$$

No hay duda que la mayoría de la gente cree que dichos números forman parte del maravilloso progreso de la ciencia y que hace unas pocas generaciones, para no hablar de siglos

[11] No hay porque suponer que sir Arthur los ha contado Pero tiene una teoría para justificar su afirmación Cualquiera que tenga una teoría mejor puede contradecir a sir Arthur Pero ¿quién puede ser el juez? He aquí el número exacto, según sostiene, hasta la última cifra:

15.747.724.136.275.002.577.605.653.961.181.555.468.044.717.914.527.116.709.366.231.425.076.185.631.031.296.

[12] Para la definición de los números primos, véase el capítulo sobre Pie.

atrás, nadie podría haberlos concebido, ni en sueños, ni con la imaginación.

Hay en ello algo de verdad. Por una parte, los antiguos y engorrosos métodos de notación matemática hacían muy difícil, cuando no realmente imposible, la escritura de grandes números. Por otra parte, el ciudadano medio de hoy encuentra cifras inmensas similares como expresión de gastos en armamentos y de las distancias estelares, de manera que está completamente familiarizado, e inmunizado, con los grandes números.

Pero había gente inteligente en la antigüedad. Los poetas de toda época podrán haber cantado a las estrellas como infinitas en número, cuando todas las que alcanzaban a ver eran, acaso, tres mil. Sin embargo, Arquímedes no se desconcertaba por un número grande como un gúgol, o aún mayor. Lo dice en un pasaje de introducción a su obra "El arenario", verificando que un número no es infinito por el solo hecho de ser enorme.

"Hay algunos, Rey Gelon, que piensan que el número de granos de arena es infinito en multitud y yo me refiero a la arena que existe, no sólo en las proximidades de Siracusa y en el resto de Sicilia, sino también a la que se encuentra en otras regiones, ya sean habitadas o no. Por otra parte, hay algunos que, sin considerarlo como infinito, piensan que aún no se ha fijado un número lo suficientemente grande, como para exceder su multitud. Y es claro que aquellos que sostienen este punto de vista, se imaginasen una masa formada por "arena, tan grande como la masa de la Tierra, incluyendo en ella todos los mares y las depresiones, llenos hasta una altura igual a la de la montaña más alta, tendrían todavía mayores dificultades para reconocer que podría expresarse algún número, lo suficientemente grande, como para exceder la multitud de la arena así tomada. Pero trataré de probar mediante demostraciones geométricas que vos podréis seguir, que, de los números nombrados por mí e indicados en la obra que envié a Zeuxippus, algunos exceden, no sólo el número de la masa de arena igual en magnitud a la Tierra rellenada en la forma descrita, sino también la de una masa igual en magnitud al Universo".

Los griegos tenían ideas muy definidas acerca del infinito. Así como les estamos reconocidos por muchos de nuestros juicios y de nuestra ciencia, así también les debemos muchos de nuestros sofismas respecto al infinito. En realidad, si hubiéramos conservado siempre su claridad de visión, no habrían surgido jamás muchos de los problemas y paradojas relacionados con el infinito.

Ante todo, debemos damos cuenta de que. "muy grande" e "infinito", son completamente distintos[13]. Teóricamente, por el método de la correspondencia uno a uno, los protones y los electrones del Universo pueden contarse con la misma facilidad que los botones del chaleco. Suficientes y más que suficientes para esta tarea o para la tarea de contar cualquier colección finita son los números enteros. Pero medir la *totalidad de los números enteros* es otro problema. La medición de este conjunto exige un más elevado punto de vista. Además de ser, como lo pensó el matemático alemán Kronecker, obra de Dios, lo que requiere fe para apreciarla, la clase de los números enteros es infinita —lo cual es muchísimo más inconveniente. ¡Es más que herejía, pretender medir nuestra propia e interminable vara de medir!

Los problemas del infinito han desafiado la mente del hombre, y encendido su imaginación como ningún otro problema de la historia del pensamiento humano. El infinito nos parece, a un mismo tiempo, tan extraño como familiar. Algunas veces, más allá de nuestra comprensión; otras, natural y fácil de entender. Al conquistarlo, el hombre rompió las cadenas que lo aprisionaban a la Tierra. Para esta conquista se requirieron todas sus facultades: su capacidad de raciocinio, su fantasía poética y su afán de saber. Para establecer la ciencia del infinito se requiere el principio de *inducción matemá-*

[13] No hay un punto donde lo muy grande comience a confundirse con el infinito. Usted puede escribir un número tan grande como le plazca, no estará más cerca del infinito que el número 1 o el número 7. Asegúrese que usted entiende muy claramente esta distinción y habrá dominado muchas de las sutilezas del transfinito.

tica. Este principio afirma la fuerza del raciocinio por recurrencia o repetición. Simboliza casi todo el pensamiento matemático, todo lo que hacemos cuando construimos agregados complejos partiendo de elementos simples. Es, como lo destacó Poincaré, "a la vez, necesaria al matemático, e irreductible a la lógica". El enunciado del principio reza así: "Si una propiedad es cierta para el número 1 y si demostramos que será verdadera para n+1 [14], siempre que lo sea también para n, la propiedad será verdadera para la totalidad de los números naturales " La inducción matemática no deriva de la experiencia, sino que más bien constituye una propiedad de la mente, intuitiva, inherente y casi instintiva: *"Lo que hemos hecho una vez lo podemos hacer nuevamente"*

Si podemos formar números hasta diez, hasta un millón, hasta un gúgol, llegamos a la conclusión de que no hay barrera, de que no hay fin. Convencidos de esto, no necesitamos proseguir eternamente, la mente llega a comprender lo que nunca ha experimentado: el infinito mismo. Sin ninguna sensación de discontinuidad, sin transgredir los cánones de la lógica, el matemático y el filósofo han tendido un puente sobre el golfo que separa lo finito de lo infinito. Las matemáticas del infinito constituyen una confirmación completa del poder innato de razonar por recurrencia.

Probablemente todo el mundo comprende el significado de "infinito" en la acepción de "sin fin, sin límites", sencillamente, de "no finito". En tanto no se requiera una definición precisa, ello no plantea dificultades. No obstante, y a pesar del famoso aforismo según el cual la matemática es la ciencia en la que no se sabe de qué estamos hablando, ni si lo que se dice es cierto, será necesario, al menos, ponemos de acuerdo para hablar sobre lo mismo. Como es obvio, incluso personas de temperamento científico pueden polemizar agriamente, y llegar, a veces, hasta la difamación personal, sobre toda clase de cuestiones, desde el marxismo y el materialismo dialéctico, hasta la teoría de grupos y el principio de indeterminación,

[14] Donde *n* es cualquier número entero, positivo.

para descubrir, próximos ya al agotamiento y el fallo cardiaco, que se encuentran del mismo lado de la valla. Tales discusiones son muchas veces consecuencia de una terminología vigorosa. Suponer que todo el mundo está familiarizado con la definición matemática precisa de "infinito" equivale a construir nuevamente la Torre de Babel.

Antes de intentar dar una definición, haríamos bien en volver la mirada, y ver cómo enfocaron el problema los matemáticos y filósofos de otras épocas.

Hay en lo infinito dos facetas, lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. Se han propuesto, para demostrar o refutar su existencia, multitud de razonamientos y demostraciones, luego descartados y más tarde vueltos a resucitar. Pocos de estos razonamientos han sido rebatidos alguna vez; han ido quedando enterrados bajo la avalancha de otros. Feliz resultado de todo ello ha sido que el problema nunca ha llegado a resolverse[15].

La lucha, que comenzó en la antigüedad, con las paradojas de Zenón, jamás ha cesado. Los puntos dudosos, fueron discutidos con un fervor digno de los primeros mártires cristianos, pero sin una décima parte del cacumen de los teólogos de la Edad Media. Hoy en día algunos matemáticos opinan que el infinito ha sido reducido a un estado de vasallaje. Otros están todavía preguntándose qué es.

Los rompecabezas de Zenón pueden ayudar a enfocar mejor el problema. Zenón de Elea, como se recordará, dijo algunas cosas inquietantes sobre el movimiento al referirse a una flecha, a Aquiles y a la tortuga. Esta extraña asociación fue empleada en defensa del principio de la filosofía eleática, de que todo movimiento es una ilusión. Algunos, probablemente "críticos contrariados", han sugerido que "Zenón mismo no hablaba en serio cuando propuso sus rompecabezas".

[15] Nadie ha escrito más brillante e ingeniosamente a la vez sobre este tema que Bertrand Russell. Véase particularmente sus ensayos en el volumen *Mysticism and Logic*.

Prescindiendo del motivo de los mismos, baste decir que son extraordinariamente sutiles y, quizá por eso, desafían aún hoy toda solución[16].

Una paradoja —la de dicotomía— afirma que es imposible recorrer una distancia dada. He aquí el razonamiento: primero, debe recorrerse la mitad de la distancia; luego, la mitad de la distancia restante; luego, otra vez, la mitad de la que queda y así sucesivamente. ¡Se deduce que siempre queda alguna parte de la distancia a recorrer y, por lo tanto, el movimiento es imposible! Una solución de esta paradoja consiste en ver que las distancias sucesivas a recorrer forman una serie geométrica infinita:

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$$[17]

cada uno de cuyos términos es la mitad del que le precede. Aunque esta serie tiene un infinito número de términos, su suma es *finita* e igual a 1. En esto, se dice, radica el defecto de la dicotomía. Zenón supuso que cualquier totalidad, compuesta de un número infinito de partes debe, en sí misma, ser infinita, mientras que, como acabamos de ver, un infinito número de elementos forman la totalidad finida, a saber, 1.

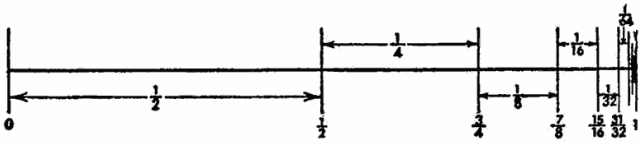


Fig. 10

La paradoja de la tortuga establece que Aquiles, corriendo para alcanzar la tortuga, debe llegar primero al lugar de donde

[16] Es indudable que se han dado para las paradojas diversas explicaciones En último análisis, las explicaciones de los acertijos se basan en la interpretación de los fundamentos de las matemáticas. Matemáticas como Brouwer, que descartan el infinito no aceptarían probablemente, ninguna de las soluciones dadas.

[17] Se dice que esta serie *converge a un límite* 1 La discusión de este concepto debemos posponerla para tratarla en los capítulos sobre Pie y el cálculo.

ésta partió. Para cuando Aquiles llegue, la tortuga habrá avanzado un poco. Esta comedia se repite, sin embargo, indefinidamente. A medida que Aquiles llega a cada nuevo punto de su carrera, la tortuga, que había estado allí, ya lo ha abandonado. A Aquiles le resulta tan imposible alcanzarla, como a los jinetes de un carrusel, al jinete que va adelante.

Finalmente, la flecha en vuelo debe estar moviéndose en todo instante de tiempo. Pero a cada instante debe estar en *algún lugar* del espacio. Sin embargo, si la flecha debe estar siempre en algún sitio, no puede, en cada instante, estar también en tránsito, pues estar en tránsito equivale a estar en *ninguna parte.*

Aristóteles y otros santos menores, de casi todas las épocas, trataron de destruir estas paradojas, pero no lo hicieron muy hábilmente. Tres profesores alemanes triunfaron donde los santos habían fracasado. A fines del siglo XIX, parecía que Bolzano, Weierstrass y Cantor habían dejado tranquilo al infinito, así como a las paradojas de Zenón.

El método moderno de tratar las paradojas no consiste en descartarlas como simples sofismas, indignos de merecer seria atención. La historia de las matemáticas, en efecto, refiere una poética rehabilitación de la actitud de Zenón. El famoso matemático y filósofo inglés Bertrand Russell ha dicho que Zenón fue "una notable víctima de la falta de juicio de la posteridad". Esa injusticia ha sido reparada. Al ocuparse de lo infinitamente pequeño, Weierstrass demostró que la flecha en movimiento *está*, realmente, siempre en reposo y que nosotros vivimos en el mundo inalterable de Zenón. La obra de Georg Cantor, como pronto veremos, demostró que si creemos que Aquiles *puede* alcanzar a la tortuga, debemos estar preparados para admitir una paradoja aún mayor que todas las que Zenón jamás pudo haber concebido: ¡EL TODO NO ES MAYOR QUE MUCHAS DE SUS PARTES!

Lo infinitamente pequeño había sido un engorro durante más de dos mil años. Aun en las mejores circunstancias, las innumerables opiniones que provocó merecieron el lacónico veredicto de los tribunales escoceses: "No probado." Hasta

que apareció Weierstrass, el progreso total fue una confirmación del argumento de Zenón contra el movimiento.

Hasta las bromas fueron mejores. Según Carlyle, Leibniz cometió el error de tratar de explicar a una reina —Sofía Carlota de Prusia— el cálculo infinitesimal. Ella le manifestó que la conducta de sus cortesanos la había familiarizado tanto con lo infinitamente pequeño, que no necesitaba un preceptor matemático para que se lo explicara. Pero los filósofos y matemáticos, según Russell, "teniendo menos conocimiento de las cortes, continuaron discutiendo este tópico, aunque sin lograr adelanto alguno".

Berkeley, con la sutileza y humor propios de un obispo irlandés, hizo algunos satíricos ataques a los infinitésimos, durante el período de la adolescencia del cálculo, ataques provistos del duro e ingenioso aguijón de la mejor escolástica. Se podía quizá hablar, al menos con fervor poético, de lo infinitamente grande, pero, ¿qué era lo infinitamente pequeño? Los griegos, renunciando a su acostumbrada perspicacia, lo introdujeron al considerar que un círculo difería infinitesimalmente de un polígono que tuviese un gran número de lados iguales. Leibniz lo usó para construir el cálculo infinitesimal. Sin embargo, nadie sabía qué era. Lo infinitesimal tenía propiedades asombrosas. No era cero y sin embargo era menor que cualquier cantidad. No se le podía asignar ni cantidad ni tamaño, y ello no obstante, un número algo grande de infinitesimales forma una cantidad perfectamente definida. Incapaz de descubrir su naturaleza, mas, por fortuna, capaz de hacer caso omiso de ella, Weierstrass la enterró junto al flogisto y demás errores otrora apreciados.

Más obstinada fue la resistencia que presentó lo infinitamente grande. Sea lo que fuere, demostró ser mala hierba. Esta cuestión, sobre la que se han escrito desatinos por resmas, fue analizada por primera vez de modo lógico, completo y sin los prejuicios que serían de temer en un clérigo por el checo Bernhard Bolzano, en un pequeño y extraordinario volumen, titulado *Die Paradoxien des Unendlichen* (Las

paradojas del infinito), publicado en 1851 como obra póstuma. Lo mismo que la obra de otro sacerdote, el austríaco Gregor Mendel, cuyo notable tratado sobre los principios de la herencia sólo escapó al olvido por casualidad, este importante libro de Bolzano, de redacción encantadora, no produjo gran impresión entre sus contemporáneos. Es la creación de una inteligencia clara, poderosa y penetrante. Por vez primera en veinte siglos, el infinito fue tratado como problema científico, y no teológico. Tanto Cantor como Dedekind están en deuda con Bolzano, por haber dado éste fundamento al tratamiento matemático de lo infinito. Entre las muchas paradojas que Bolzano recopiló y explicó, una de ellas, que databa de la época de Galileo, ejemplifica una típica fuente de confusión.

Constrúyase un cuadrado —*ABCD*. Tomando como centro el punto *A* y con una abertura del compás igual al lado, trácese un cuadrante de circunferencia, que intersecte al cuadrado en *B* y D. Trácese *PR* paralela a AD, de tal manera que corte a *AB* en *P*, a CD en *R*. a la diagonal *AC* en N y a la cuarta parte del círculo en *M*.

Por un teorema de geometría, muy conocido, puede demostrarse que si *PN*, *PM* y *PR* son radios, existe la siguiente relación:

$$\pi\overline{PN}^2 = \pi\overline{PR}^2 - \pi\overline{PM}^2 \qquad (1)$$

Hágase que *PR* se aproxime a *AD*, entonces el círculo de radio *PN* se hace más pequeño, y otro tanto ocurre con el anillo formado por los círculos de radios PM *y PR a* medida, que uno de sus radios, *PM*, aumenta. Finalmente, cuando *PR* se confunda con *AD*, el radio *PN* desaparece quedando el punto *A* mientras que el anillo comprendido entre los dos círculos *PM* y *PR* se convierte en el perímetro del círculo de radio *AD*. De acuerdo a la ecuación (1) se llega a la conclusión de que el *punto A* ocupa tanta superficie como la *circunferencia* de círculo de radio AD.

Bolzano comprendió que aquí sólo hay una *apariencia* de paradoja. Las dos clases de puntos, una compuesta de un solo miembro, el punto A, y la otra de los puntos que hay en la

circunferencia de círculo de radio *AB*, ocupan exactamente la misma cantidad de superficie. ¡El área de cada una de ellas es igual a cero! La paradoja nace de la equivocada noción de que el número de puntos de una figura dada tiene relación con el área de la porción de superficie que ocupa. Los puntos carecen de tamaño y dimensión, y en número finito (e incluso en muchos casos, infinito), no pueden llenar superficie alguna.

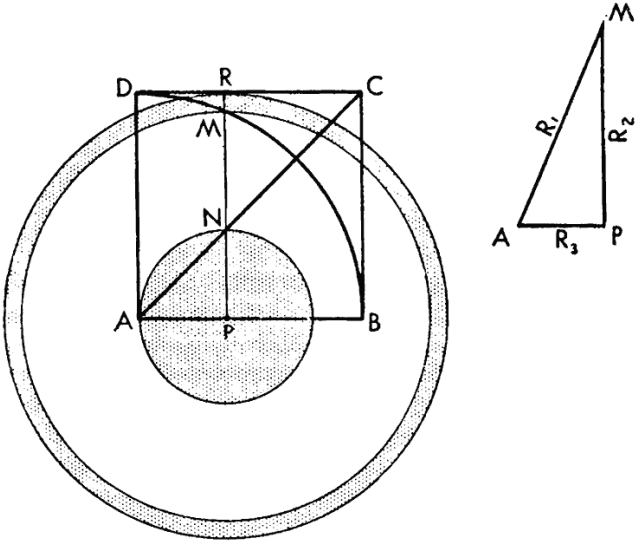


Fig. 11. Sustráigase el triángulo APM de la figura. Es fácil ver que sus tres lados son iguales, respectivamente, a los radios de los tres círculos. Luego:

$$R_1^2 - R_2^2 = R_3^2$$

o bien:

$$\pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi R_3^2$$

o bien: las dos superficies sombreadas son iguales

En el transcurso de los siglos han ido acumulándose paradojas similares. Nacidas de la unión de ideas imprecisas y de dudosas reflexiones de índole filosófica, fueron desarrollándose, fundadas en nociones imperfectas. Bolzano aclaró en gran medida la confusión, dejando expedito el camino a Can-

tor. A Cantor debe la matemática de lo infinitamente grande haber alcanzado la mayoría de edad.

Georg Cantor nació en San Petersburgo en 1845[18], seis años antes de que apareciese el libro de Bolzano. Aunque nacido en Rusia, vivió la mayor parte de su vida en Alemania, donde fue profesor en la Universidad de Halle. Mientras Weierstrass estaba ocupado tratando el cálculo infinitesimal. Cantor se dedicó a la tarea opuesta, aparentemente más formidable. Uno podría reírse de la existencia de lo infinitamente pequeño, pero ¿quién se animaría a reírse de lo infinitamente grande? Por cierto que no iba a ser Cantor. La curiosidad teológica lo impulsó en su tarea, aunque el interés matemático se antepuso a cualquier otro.

Tratando la ciencia del infinito. Cantor comprendió que el primer requisito consistía en definir términos. Su definición de "clase infinita", que parafraseamos, se basta en una paradoja: UNA CLASE INFINITA TIENE LA SINGULAR PROPIEDAD DE QUE EL TODO NO ES MAYOR QUE ALGUNA DE SUS PARTES. Esta proposición es tan esencial para las matemáticas del infinito como la que expresa: EL TODO ES MAYOR QUE CUALQUIERA DE SUS PARTES, para la aritmética finita. Si recordamos que dos conjuntos son equivalentes cuando sus elementos pueden ponerse en correspondencia biunívoca, esta última proposición resulta evidente. Zenón no se habría animado a contradecirla, a pesar de su escepticismo acerca de lo evidente. Pero lo que para lo finito es evidente, es falso para lo infinito; nuestra amplia experiencia con los conjuntos finitos es engañosa. Por ejemplo, puesto que los conjuntos de humanos y de matemáticos son ambos finitos, alguien, al comprobar que algunos hombres no son matemáticos, llegaría correctamente a la conclusión de que la clase de los humanos es la más grande de las dos. También podría inferir que el número de enteros, pares e impares, es mayor que el número

[18] Puede verse un excelente artículo sobre Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos en el número de agosto de 1983 de la revista Investigación y Ciencia *(N del R)*.

de enteros pares. Pero vemos, de acuerdo con el siguiente emparejamiento, que se equivocaría:

1	2	3	4	5	6	7	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
2	4	6	8	10	12	14	…

Debajo de cada número entero, par o impar, podemos escribir su duplo —que es un número entero par. Es decir, colocamos cada uno de los elementos del conjunto de todos los números naturales, tanto los impares como los pares, en una correspondencia biunívoca con los elementos de la clase compuesta únicamente por números naturales pares. Es posible continuar este proceso hasta el gúgolplex y más allá todavía.

Ahora bien, el conjunto de los números naturales es infinito. Ningún número natural, no importa cuán grande sea, puede describir su cardinalidad (o "numerosidad"). Sin embargo, puesto que es posible establecer una correspondencia biyectiva entre la clase de los números pares y la clase de los números naturales, hemos logrado contar la clase de los números pares del mismo modo que contamos una colección finita. Estando perfectamente equiparadas las dos clases, debemos llegar a la conclusión de que tienen la misma cardinalidad. Que su cardinalidad es la misma, *lo sabemos*, al igual que supimos que las sillas y las personas que había en el salón eran iguales en número cuando cada silla estaba ocupada y nadie quedó de pie. De este modo llegamos a la paradoja fundamental de todas las clases infinitas: Existen partes componentes de una clase infinita que son tan grandes como la clase misma. ¡EL TODO NO ES MAYOR QUE ALGUNA DE SUS PARTES!

La clase compuesta por los números enteros pares *es un conjunto entresacado* de la clase de todos los números enteros, pero, evidentemente el "entresacar" no tiene el más leve efecto sobre su cardinalidad. Además casi no hay límite al número de veces que puede repetirse este proceso. Por ejem-

plo, hay tantos números elevados al cuadrado y al cubo como números enteros. Los emparejamientos apropiados son:

1	2	3	4	5	6	…	1	2	3	4	5	6	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	4	9	16	25	36	…	1	8	27	64	125	216	…
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	…	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	…

En realidad, de cualquier clase numerable puede siempre sacarse un número numerable infinito de clases numerables infinitas, sin que ello altere el cardinal de la clase original.

Cantor llamó *contables o numerablemente infinitas* a las clases infinitas que pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los números naturales y, por lo tanto, ser "contadas". Ya que todos los conjuntos finitos son contables y dado que podemos asignar un número a cada uno de ellos, es natural que tratemos de extender la noción de número, asignando a la clase de todos los números naturales, un número que exprese su cardinalidad. Sin embargo, es evidente, de acuerdo a nuestra descripción de "conjunto finito", que ningún número entero ordinario sería adecuado para describir la cardinalidad de toda la clase de los números enteros. En efecto, sería como pedirle a una culebra que se tragase a sí misma, toda entera. De este modo, fue creado el primero de los números transfinitos para describir la cardinalidad de las clases infinitas numerables. Se sugirió representarlo con un símbolo etimológicamente antiguo, pero matemáticamente nuevo: la primera letra del alfabeto hebreo. $\aleph$ (aleph). Sin embargo, Cantor, decidió finalmente usar el símbolo compuesto $\aleph_0$ (aleph-cero). Si se nos pregunta "¿cuántos números naturales hay?", sería correcto contestar: "Hay $\aleph_0$ números naturales."

Debido a que Cantor sospechó que había otros números transfinitos, más aún, un número infinito de transfinitos y que la cardinalidad de los números naturales era la más pequeña de todas, le añadió a la primera $\aleph$ un cerito como subíndice. La cardinalidad de una clase numerable infinita se indica, por

lo tanto con (aleph-subcero). Los números transfinitos que hemos anticipado forman una jerarquía de alephs: $\aleph_0$. $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$ ...

Todo esto puede parecer muy extraño, y sería completamente disculpable que el lector se encontrase, a esta altura, enteramente desconcertado. Sin embargo, si usted ha seguido el razonamiento precedente, paso por paso, y se toma la molestia de releerlo, verá que nada de cuanto se ha dicho es incompatible con el correcto razonamiento. Habiendo establecido el significado de contar en el dominio de lo finito, y lo que significa número, decidimos hacer extensivo el proceso de contar a las clases infinitas. En cuanto a nuestro derecho para llevar a cabo tal procedimiento, es el mismo, por ejemplo, de aquellos que decidieron que el hombre se había arrastrado bastante sobre la superficie de la Tierra y que ya le había llegado el tiempo de volar. Es nuestro derecho a aventuramos en el mundo de las ideas así como el de ampliar nuestras miras en el universo físico. En estas aventuras de ideas solamente se nos impone una restricción: que procedamos de acuerdo con las reglas de la lógica.

Al extender el proceso de contar, en seguida saltó a la vista que ningún número finito podría describir adecuadamente una clase infinita. Si algún número de la aritmética común describe la cardinalidad de una clase, esa clase tiene que ser finita, aun cuando no haya suficiente tinta, espacio o tiempo para escribir dicho número. Necesitaremos pues, un tipo de número completamente nuevo, que no se encuentre en ninguna parte de la aritmética finita, para describir la cardinalidad de una clase infinita. Por consiguiente, se asignó la cardinalidad "aleph" a la totalidad de los números enteros Sospechando que había *otras* clases infinitas, con cardinalidad *mayor* que la de la totalidad de los números enteros, supusimos toda una jerarquía de alephs de la cual designamos con aleph-cero al número cardinal que representa la totalidad de los números enteros, con lo que se quiso indicar que era el más pequeño de los transfinitos.

Después de este inciso, a modo de resumen, volvamos una vez más a escudriñar los "alephs" para ver si, con un conocimiento más íntimo, resultan más fáciles de comprender.

La aritmética de los alephs tiene poca semejanza con la de los números enteros finitos. El osado comportamiento de $\aleph_0$ es típico.

Un simple problema de suma se presenta así:

$$\begin{aligned} \aleph_0 + 1 &= \aleph_0 \\ \aleph_0 + \text{gúgol} &= \aleph_0 \\ \aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0 \end{aligned}$$

La tabla de multiplicar sería fácil de enseñar, pero más fácil aún de aprender:

$$\begin{aligned} 1 \times \aleph_0 &= \aleph_0 \\ 2 \times \aleph_0 &= \aleph_0 \\ 3 \times \aleph_0 &= \aleph_0 \\ n \times \aleph_0 &= \aleph_0 \end{aligned}$$

En la cual n representa un número finito cualquiera.

Asimismo.

$$(\aleph_0)^2 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

y, por lo tanto.

$$(\aleph_0)^n = \aleph_0$$

donde n es un número natural finito.

Parece que no hubiera variación en el tema; la monotonía parece inevitable Pero todo es muy engañoso y traicionero Seguimos adelante obteniendo el mismo resultado a pesar de todo lo que hagamos con cuando de repente probamos:

$$(\aleph_0)^{\aleph_0}$$

Esta operación crea, al fin, un nuevo transfinito. Pero antes de considerarlo hay que decir algo más sobre las clases numerables.

El sentido común nos dice que hay muchas más fracciones que números enteros, puesto que entre dos enteros cualesquie-

ra hay un número infinito de fracciones. Pero, ¡ay!, el sentido común ha de ser descartado en el país del infinito. Cantor descubrió una demostración tan sencilla como elegante, según la cual las fracciones racionales forman una sucesión numerablemente infinita, equivalente a la clase de los números naturales. Por consiguiente, esta sucesión debe tener la misma cardinalidad que éstos[19].

Se dispone el conjunto de todas las fracciones racionales, no en el orden de valores crecientes, sino en el orden de los numeradores y denominadores ascendentes, en una tabla como la de la figura 12.

Ya que cada fracción puede escribirse como un par de números enteros, es decir. 3/4 como (3, 4), puede efectuarse la ya muy conocida correspondencia uno a uno con los números naturales tal como se indica mediante flechas en la figura 12.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
(1,1)	(2,1)	(1,2)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(4,1)	(3,2)	(2,3)	…

Cantor también descubrió, mediante una demostración (que no tratamos aquí por ser demasiado técnica) basada en el grado de las ecuaciones algebraicas, que el conjunto de todos los números algebraicos, números que son soluciones de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros de la forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_{n-1}x + a_n = 0$$

es numerablemente infinito.

[19] Se nos ha sugerido que al llegar aquí, el lector, cansado, cierra el libro con un suspiro —y se va al cine. Sólo podemos adelantarle, para calmarlo, que esta demostración, como la que sigue sobre la no numerabilidad de los números reales, es difícil. Usted puede rechinar los dientes y tratar de entender lo que pueda de ellas, o bien prescindir de ambas Lo esencial, antes de retirarse, es saber que Cantor descubrió que las fracciones racionales son numerables pero que el conjunto de los números reales no lo es. De este modo, y a pesar de lo que le dicte el sentido común, no hay más fracciones que números enteros, y hay más números reales *entre* 0 y 1 que elementos en toda a clase de los números enteros

Pero Cantor intuyó que había otros transfinitos, que había clases que no eran numerables, clases que no podían ponerse en correspondencia biyectiva con los números enteros. Y uno de sus mayores triunfos tuvo lugar cuando demostró que hay clases que poseen una cardinalidad mayor que $\aleph_0$.

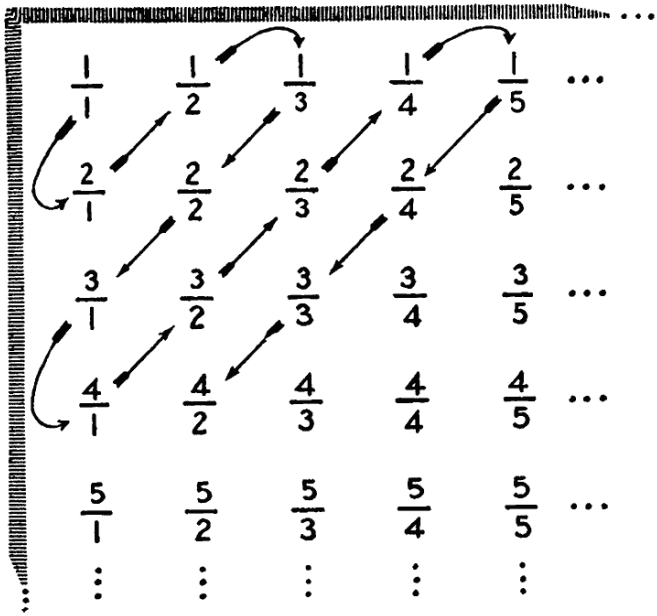


Fig. 12. Método diagonal de Cantor.

La clase de los números reales, compuesta de los números racionales e irracionales[20], es una de ellas. Contiene a aquellos irracionales que son algebraicos, así como a los que no lo son. Estos últimos se denominan *números trascendentes*[21].

[20] Los números irracionales son aquellos que *no pueden* expresarse como fracciones racionales Por ejemplo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e, π. La clase de los números reales está formada de racionales como 1, 2, 3, 1/4, 17/32, e irracionales como los arriba indicados.

[21] Un número trascendente es aquel que no es la raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros. Véase Pie.

En la época de Cantor se conocían dos importantes números trascendentes: π, la relación de la circunferencia de un círculo con respecto a su diámetro, y *e*, la base de los logaritmos naturales. Muy poco más se sabía acerca de la clase de los trascendentes: era un verdadero enigma. Cantor tenía que probar, a fin de demostrar que la clase de los números reales era no numerable (es decir, demasiado grande para poderse contar con la clase de los números enteros), el hecho improbable de que la clase de los trascendentes era no numerable. Ya que se sabía que los números racionales y algebraicos eran numerables y que la unión de cualquier colección numerable de clases numerables es también una clase numerable, la única clase restante que podía hacer que la totalidad de los números reales fuese no numerable era, por lo tanto, la clase de los trascendentes.

Cantor pudo idear semejante demostración Si puede demostrarse que la clase de los números reales, comprendidos entre 0 y 1, es no numerable, se deducirá, *a fortiori*, que todos los números reales son no numerables. Empleando un recurso, usado muy a menudo en las matemáticas superiores, la *reductio ad absurdum*. Cantor supuso que era verdadero lo que sospechaba que era falso y entonces demostró que su suposición lo conducía a una contradicción. Supuso que los números reales comprendidos entre 0 y 1 eran numerables y podían, por lo tanto, ser biunívocamente emparejados con los números naturales. Habiendo probado que esta hipótesis lo llevaba a una contradicción, dedujo que su opuesta, a saber, que los números reales no podían ser emparejados con los números naturales (y, por lo tanto, formaban un conjunto no numerable) era verdadera.

Para poder numerar los números reales comprendidos entre 0 y 1 se requiere que todos ellos sean expresables de modo uniforme, y además, inventar un método para escribirlos en orden, de modo que se puedan ser, uno a uno, biunívocamente emparejados con los números naturales. El primer requisito puede cumplirse, ya que todo número real puede expresarse

mediante un número decimal de infinitas cifras. Así, por ejemplo[22]:

1/3 = 0,33333…	3/14 = 0,21428571428571…
1/9 = 0,1111111…	(√2)/2 = 1,414…/2 = 0,707…

Pero se nos plantea ahora la segunda dificultad. *¿Cómo definir el emparejamiento?* ¿Qué sistema podríamos idear, que garantice que *todos los números decimales* figuren en el emparejamiento? Hemos estudiado ya un método para asegurar la presencia en él de todas las fracciones racionales. Por supuesto que no podríamos escribirlas material y físicamente a todas, como tampoco podríamos escribir la totalidad de los números naturales; pero el método de ir aumentando los numeradores y denominadores es tan explícito, que si dispusiéramos de tiempo infinito para ello, escribiríamos realmente todas las fracciones, con la seguridad de no haber omitido ninguna. Dicho de otro modo, siempre sería cierto y concluyente, que tras haber casado una fracción con un número natural, siempre sabríamos cuál sería la próxima fracción, y la siguiente, y la próxima, y así indefinidamente.

Por otra parte, si suponemos un número real, expresado en forma de número decimal de infinitas cifras, emparejado con un determinado número natural, ¿qué método habría para determinar cuál será, en el orden de la sucesión natural, el próximo número real a emparejar? Es suficiente preguntarse cuál será el *primero* de estos decimales infinitos, el que debe emparejarse con el número natural 1, para vislumbrar la dificultad del problema. Lo que hizo Cantor fue *suponer* que tal emparejamiento existía, sin tratar de dar su forma explícita. He aquí su plan: asociar al número 1 el decimal $0,a_1a_2a_3...$; con el número 2, el decimal $0,b_1b_2b_3...$, etc. Cada una de estas letras subindiciadas representa un dígito del número decimal en que interviene. La tabla de emparejamientos entre números naturales y decimales infinitos sería así:

[22] Cualquier decimal como 0,4 tiene la forma de fracción decimal infinita: 0,3999.

$1 \leftrightarrow 0, a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \ldots$
$2 \leftrightarrow 0, b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5 \ldots$
$3 \leftrightarrow 0, c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5 \ldots$
$4 \leftrightarrow 0, d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5 \ldots$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Ésta era la tabla de Cantor. En seguida se hizo evidente que mostraba, y de forma notoria, la contradicción misma que Cantor había estado buscando. Y en esta derrota radica su triunfo, pues indiferentemente de *como* estén dispuestos los decimales, cualquiera que sea el sistema de ordenación adoptado, siempre será posible construir infinitos más que no figuren en la tabla. Vale la pena repetir este punto: habiendo ideado una tabla, en la creencia de que la misma contendría a *todos* y *cada uno* de los números decimales comprendidos entre 0 y 1, descubrimos que a pesar de todos nuestros esfuerzos siempre hay decimales que han sido omitidos. Cantor demostró que así sucede mediante su famoso "método diagonal". Las condiciones que permiten construir un decimal que no figure en la tabla son sencillas: haremos que difiera del primer decimal de la tabla en la primera cifra: del segundo, en la segunda; del tercero, en la tercera; y así sucesivamente. Pero entonces, tal decimal *diferirá de cada uno de los decimales de toda la tabla*, al menos en una cifra. Si, como vemos en la figura, trazamos una diagonal en nuestra hipotética tabla, y escribimos un nuevo decimal, cada uno de cuyos dígitos difiera del correspondiente interceptado por la diagonal, el decimal así construido no podrá encontrarse en la tabla.

$1 \leftrightarrow 0, \cancel{a_1}\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \ldots$
$2 \leftrightarrow 0, b_1\ \cancel{b_2}\ b_3\ b_4\ b_5 \ldots$
$3 \leftrightarrow 0, c_1\ c_2\ \cancel{c_3}\ c_4\ c_5 \ldots$
$4 \leftrightarrow 0, d_1\ d_2\ d_3\ \cancel{d_4}\ d_5 \ldots$
5 0, e1, e2, e3, e4, $\cancel{e_5}\ldots$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

El nuevo decimal puede escribirse así:

$$0,a_1a_2a_3a_4a_5...;$$

en el cual a_1, difiere de a_1, a_2 difiere de b_2, a_3, de c_3, a_4 de d_4. etc. Por consiguiente, diferirá de cada decimal en una cifra por lo menos, y del enésimo decimal en, por lo menos, la enésima cifra. Esto prueba, en forma concluyente, que no hay manera alguna de incluir a todos los decimales en algún arreglo posible, que no existe modo alguno de aparearlos con los números enteros. Por lo tanto, como Cantor demostró:

1. La clase de los números trascendentes es, no sólo infinita, sino, además, no numerable.
2. El conjunto de los números reales comprendidos entre 0 y 1 es infinito y no numerable.
3. *A fortiori*, la clase de todos los números reales es no numerable.

Cantor asignó un nuevo cardinal transfinito a la clase no numerable de los números reales. Fue uno de los alephs que hasta la fecha permanece sin resolver[23].

La aritmética de C es casi la misma que la de $\aleph_0$. La tabla de multiplicar tiene la misma cualidad monótona formal. Pero cuando C se combina con $\aleph_0$, lo absorbe por completo. Así:

$$C + \aleph_0 = C \qquad C - \aleph_0 = C$$
$$C \times \aleph_0 = C \qquad \text{y aun:} \qquad C \times C = C$$

[23] He aquí, brevemente expuesta, la situación Está demostrado que la llamada "potencia del continuo". *C*. que es el cardinal del conjunto de números reales, es mayor que $\aleph_0$, según acabamos de ver El propio Cantor demostró que $C = 2^{\aleph_0}$, donde $2^{\aleph_0}$ es el cardinal de la clase compuesta por todos los subconjuntos de los números naturales Cantor se esforzó largo tiempo en demostrar que no existe entre $\aleph_0$, y C ningún cardinal intermedio, esto es, que hay un número transfinito inmediatamente consecutivo a $\aleph_0$, y que este número, $\aleph_1$ es C. Ahora sabemos, gracias a trabajos de Kurt Gödel y Paul Cohen, que tal conjetura es indecidible en el seno de la teoría de conjuntos estándar, incluso reforzada con el axioma de elección *(N. del R)*

Por segunda vez esperamos una variación en el tema cuando recurrimos al proceso de elevar a una potencia. Sin embargo, por el momento quedamos defraudados, puesto que: $C_0^{\aleph} = C$. Pero así como $(\aleph_0)^{\aleph_0}$ no es igual a $\aleph_0$, análogamente C^C no es igual a C.

Estamos ahora en condiciones de resolver nuestro anterior problema relacionado con la elevación a una potencia, pues, en realidad. Cantor encontró que $(\aleph_0)^{\aleph_0} = C$.

Análogamente C^C da origen a un nuevo transfinito, más grande que C. Este transfinito representa la cardinalidad de la clase de todas las funciones uniformes. Es también una de las $\aleph$ pero como vimos anteriormente, una $\aleph$ que es desconocida. Se la designa a menudo con la letra F [24]. En general, el proceso de elevar a una potencia, al ser repetido, engendra transfinitos de orden superior.

Así como los números enteros servían de vara de medida para las clases de cardinalidad $\aleph_0$, la clase de los números reales sirve como patrón de medida para las clases de cardinalidad C. En efecto, hay clases de elementos geométricos que no pueden medirse de otra manera que con la clase de los números reales.

Dado que entre dos puntos cualesquiera hay siempre un tercero alineado con ellos, resulta que en todo segmento rectilíneo hay un número infinito de puntos. El conjunto de puntos de un segmento tiene por ello una propiedad llamada "densidad". En el caso que nos ocupa, ello significa que entre cualesquiera dos puntos de un conjunto lineal de puntos hay infinitos puntos del mismo conjunto. La propiedad de ser densos es una de las características esenciales de un *continuo*. Cantor al tratar la "cardinalidad del continuo", se dio cuenta de que es la misma para la clase de los números reales que para el conjunto de puntos de un segmento rectilíneo. Ambos

[24] Una interpretación geométrica sencilla de la clase de todas las funciones uniformes *F*, es la siguiente: Con cada punto de un segmento de recta, asóciese un color del espectro. La clase *F* estará entonces compuesta de todas las combinaciones posibles de colores y puntos que puedan concebirse.

son conjuntos densos, del mismo cardinal, *C*. En otras palabras, es posible emparejar biunívocamente los puntos comprendidos en un segmento rectilíneo con los números reales.

Las clases de cardinalidad *C* poseen una propiedad similar a las clases de cardinalidad $\aleph_0$, pueden ser "entresacadas" sin afectar para nada a su cardinalidad. Con respecto a esto, vemos, de una manera muy sorprendente, otro ejemplo del principio de la aritmética transfinita, que el todo no es mayor que muchas de sus partes. Por ejemplo, puede demostrarse que hay tantos puntos en una línea de un metro de longitud como en otra de tres. El segmento *AB* de la figura 13 es tres veces más largo que la recta *A'B'*. Sin embargo, es posible poner el conjunto de todos los puntos del segmento *AB* en correspondencia biunívoca con el conjunto de los puntos del segmento *A'B'*.

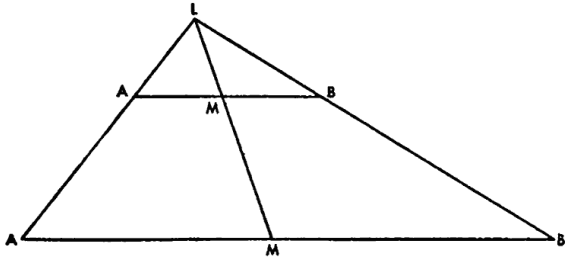


Fig. 13

Sea *L* la intersección de las rectas *AA'* y *BB'*. Si entonces a un punto *M* de *AB* le hacemos corresponder el punto *M'* de *A'B'*, perteneciente a la línea *LM*, habremos establecido la correspondencia deseada entre los conjuntos de puntos de *A'B'* y de *AB*. Es fácil ver intuitivamente, y demostrar geométricamente, que esto es siempre posible y que, por lo tanto, la cardinalidad de los dos conjuntos de puntos es la misma Así pues, ya que *A'B'* es menor que *AB*, puede considerársela una porción de *AB*, y habremos establecido, una vez más, que una clase infinita, puede contener como partes propias, subclases que le son equivalentes.

Existen en geometría ejemplos más asombrosos que ilustran sobre la potencia del continuo. Aunque es suficientemente asombrosa la afirmación de que una línea de un centímetro de longitud contiene tantos puntos como otra trazada alrededor del Ecuador, o como la de una recta que vaya desde la Tierra hasta las más lejanas estrellas, es fantástico pensar que un segmento de recta de una millonésima de milímetro tiene tantos puntos como los que existen en todo el espacio tridimensional del Universo entero. Y sin embargo, esto es cierto. Una vez que se han entendido los principios de la teoría de los transfinitos de Cantor, dichas proposiciones dejan de parecer las extravagancias de un matemático loco. Las rarezas, como lo ha dicho Russell "no parecen entonces más extrañas que lo que parecían las personas antípodas, ya que en otros tiempos eran concebidos como imposible, porque se encontrarían muy molestas al tener que apoyarse sobre sus cabezas".

Aun concibiendo que el tratamiento del infinito sea una forma de locura matemática, uno se ve obligado a admitir, como lo hace el duque en *Medida por medida:*

> *Si está loca —y no puedo creer otra cosa,*
> *su locura tiene el más extraño carácter de razón:*
> *sus palabras poseen un encadenamiento como*
> *no he conocido jamás en las palabras de la locura.*

Hasta ahora hemos eludido deliberadamente una definición de "clase infinita". Pero al fin nuestro instrumental nos habilita para hacerlo. Hemos visto que una clase infinita, ya sea su cardinalidad. $\aleph_0$, C o mayor, puede ser "entresacada" en una innumerable variedad de modos, sin afectar su cardinalidad. Más brevemente, el todo no es mayor que muchas de sus partes. Ahora bien, esta propiedad no la poseen, en modo alguno, las clases finitas; sólo pertenece a las clases infinitas. En consecuencia, es un método único para determinar si una clase es finita o infinita. Así, nuestra definición reza; *Una clase infinita es aquella que puede ponerse en una correspondencia biunívoca con un subconjunto propio de sí misma.*

Provistos de esta definición y las pocas ideas que hemos recogido, podremos examinar nuevamente algunas de las paradojas de Zenón. La de Aquiles y la tortuga puede expresarse como sigue: Aquiles y la tortuga, por recorrer el mismo camino, habrán cada uno de ellos de ocupar el mismo número de posiciones distintas durante su carrera. Sin embargo, si Aquiles desea apresar a su pausada y voluntariosa competidora, tendrá que ocupar *más* posiciones que la tortuga, en el mismo período de tiempo transcurrido. Como que esto es manifiestamente imposible, usted podrá apostar su dinero a favor de la tortuga.

Pero no se precipite usted. Hay mejores maneras de gastar el dinero. En efecto, después de todo habría sido mejor apostar a favor de Aquiles porque él es el probable ganador de la carrera. Aun cuando podamos no haberlo comprendido, acabamos de probar que podía alcanzar a la tortuga al demostrar que una línea de una millonésima de milímetro tiene tantos puntos como una recta que se extienda desde la Tierra hasta la estrella más lejana. En otras palabras, los puntos del reducidísimo segmento rectilíneo pueden ponerse en correspondencia biyectiva con los puntos de la recta grande, porque no hay relación entre el número de puntos de una línea y su longitud. Pero esto revela el error de pensar que Aquiles no puede alcanzar a la tortuga. La proposición de que Aquiles debe ocupar tantas posiciones distintas como la tortuga, es correcta. Asimismo lo es la que expresa que debe recorrer una distancia mayor que la tortuga en el mismo intervalo de tiempo. La única proposición incorrecta es la deducción de que ya que debe ocupar el mismo número de posiciones que la tortuga, no puede ir más lejos mientras así lo hace. Aun cuando los conjuntos de puntos de cada línea, que corresponden a las diversas posiciones tanto de Aquiles como de la tortuga, son equivalentes, la línea que representa la trayectoria de Aquiles es mucho más larga que la de la tortuga. Aquiles puede andar mucho más lejos que la tortuga sin tocar, sucesivamente, más puntos.

La solución de la paradoja de la flecha en vuelo, requiere una palabra acerca de otro tipo de continuo. Es conveniente, y por cierto habitual, considerar al tiempo como un continuo. El tiempo continuo tiene las mismas propiedades que el espacio continuo: Los instantes sucesivos de cualquier intervalo de tiempo transcurrido, al igual que los puntos de una línea, pueden ser puestos en una correspondencia uno a uno con la clase de los números reales; entre dos instantes cualesquiera pueden interpolarse una infinidad de otros; el tiempo tiene también la propiedad matemática antes mencionada, a saber, es denso.

El argumento de Zenón afirmaba que en cada instante la flecha estaba en alguna parte, en algún lugar o posición y, por lo tanto, no podía, en ningún instante, hallarse en movimiento. Aunque el enunciado de que la flecha tenía que estar, en cada momento, en algún lugar es cierto, la conclusión de que por lo tanto no podía estar moviéndose es absurda. Nuestra tendencia natural a aceptar este absurdo como verdad, nace de nuestra firme convicción de que el movimiento es completamente distinto del reposo.

No tenemos dudas sobre la posición de un cuerpo en reposo —tenemos la sensación de que no hay misterio alguno en el estado de reposo. Deberíamos sentir lo mismo cuando consideramos un cuerpo en movimiento.

Cuando un cuerpo está en reposo, está en una posición en un instante y un instante después está todavía en la misma posición. Cuando un cuerpo se encuentra en movimiento, existe una correspondencia uno a uno entre cada instante y cada nueva posición. A fin de aclarar estos conceptos podemos construir dos tablas: una de ellas describirá un cuerpo en reposo y la otra, un cuerpo en movimiento. La tabla de "reposo" expresará la historia y la geografía de la vida de la Estatua de la Libertad, mientras que la tabla del "movimiento" describirá la odisea de un automóvil.

Las tablas indican que a cada instante corresponde una posición de la Estatua de la Libertad y del taxi. Hay una corres-

pondencia biunívoca entre espacio y tiempo tanto para el reposo como para el movimiento.

No encierra paradoja alguna el rompecabezas de la flecha cuando observamos nuestra tabla. En efecto, lo raro sería que hubiese en ella espacios vacíos; que fuese imposible, en cualquier instante, determinar exactamente cuál es la posición de la flecha.

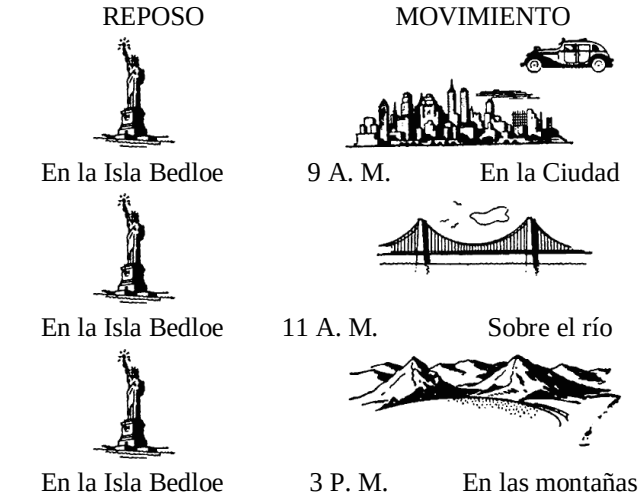


Fig. 14. En los tiempos indicados, la Estatua de la Libertad está en el punto señalado, mientras que los pasajeros del taxi contemplan los distintos paisajes de la derecha.

Casi todos nosotros juraríamos que existe el movimiento, pero no estamos acostumbrados a considerarlo como algo que hace que un objeto ocupe posiciones distintas en diferentes instantes. Somos proclives a admitir que el movimiento dota a un objeto de la extraña facultad de hallarse continuamente en ninguna parte. Trabados por las limitaciones de nuestros sentidos, que nos impiden percibir que un objeto en movimiento ocupa simplemente una posición después de otra, al hacerlo rápidamente, alentamos una ilusión sobre la naturaleza del

movimiento y la convertimos en un cuento de hadas. Las matemáticas nos ayudan a analizar y aclarar lo que percibimos hasta el punto en que nos vemos obligados a reconocer, si no deseamos dejarnos guiar más por cuentos de hadas, que vivimos, ya sea en el mundo inmutable de Russell o en un mundo donde el reposo no es sino una forma de movimiento. La historia del movimiento es la misma que la del reposo. Es la misma historia contada con un "tempo" más rápido. La historia del reposo es "está aquí"; la del movimiento es: "está aquí, está allí". El hecho de que, en este sentido, se asemeje al espectro del padre de Hamlet, no es motivo para dudar de su existencia. La mayoría de nuestras creencias están ancladas a fantasmas menos sustanciales Quizá no sea fácil para nuestros sentidos comprender el movimiento, pero, con ayuda de las matemáticas puede entenderse correctamente su esencia.

Al comenzar el siglo XX se admitía, generalmente, que la obra de Cantor había aclarado el concepto del infinito de tal manera, que podía hablarse de él y tratarlo igual que a cualquier otro concepto matemático respetable Pero las polémicas que se suscitan dondequiera se encuentren los filósofos matemáticos, ya sea por escrito o personalmente, demuestran que era ésta opinión equivocada. En sus términos más simples esta controversia, en lo tocante al infinito se centra en torno a las preguntas: "¿Existe el infinito?" "¿Hay algo semejante a una clase infinita?" Semejantes preguntas pueden tener poco significado, a menos que se explique antes la expresión "existencia" matemática.

En su famosa obra "Agony in Eight Fits". Lewis Carroll cazó el "snark"[25]. Nadie tenía conocimiento del "snark" ni sabía casi nada de él, salvo que existía, y que era mejor mantenerse alejado de un "boojum"[26]. El infinito también puede

[25] "Snark", palabra formada por la combinación de *snake* (culebra) y *shark* (tiburón), inventada por Lewis Carroll (Charles I. Dodgson) para designar a un animal absurdo que aparece en su poema *The Hunting of the Snark* (1876) Una de sus variedades se conoce como "boojum".

[26] Boojum" una especie de "snark", los cazadores del cual "desaparecen

ser un "boojum", pero su existencia, en cualquier forma, es una cuestión de considerable duda. "Boojum" o variedad de jardín, el infinito, ciertamente, no existe en el mismo sentido en que decimos: "Hay peces en el mar." Al fin de cuentas la proposición: "Hay un número llamado 7" se refiere a algo que tiene una existencia diferente a la del pez en el mar. "Existencia", en la acepción matemática, es completamente distinta de la existencia de objetos en el mundo tísico Una bola de billar puede tener como una de sus propiedades, en adición a su blancura, redondez, dureza, etc. una relación de perímetro a diámetro aproximada al número π. Estamos de acuerdo en que tanto la bola de billar como π existen, debemos también convenir en que la bola de billar y π llevan diferentes clases de vidas.

Ha habido tantas opiniones sobre el problema de la existencia, desde Euclides y Aristóteles, como filósofos. En épocas modernas las diversas escuelas de filosofía matemática, la escuela logística, formalistas, e intuicionistas, han discutido la poco menos que vidriosa esencia de la existencia matemática. Todas estas discusiones van más allá de nuestro saber, finalidad o intención Una asociación más extraña aún que la tortuga, Aquiles y la flecha, ha defendido la existencia de las clases infinitas —defendido en el mismo sentido en que habrían defendido la existencia del número 7. Los formalistas, que piensan que las matemáticas son un juego sin sentido, pero que no por eso juegan con menos gusto, y la escuela logística, que considera que las matemáticas son una rama de la lógica —ambas se han puesto de parte de Cantor y han defendido los alephs. Su defensa se basa en la noción de autoconsistencia. "Existencia" es una expresión metafísica ligada con la noción de ser, y con otros espantajos peores aun que los "boojums". Pero la expresión "proposición autoconsistente" suena como el lenguaje de la lógica y tiene su mismo aroma de santidad. Una proposición que no es contradictoria consigo misma es,

---

suave y silenciosamente" (Citas del Webster's New International Dictionary of the English Language)

de acuerdo a la escuela logística, un verdadero enunciado de existencia. Desde este punto de vista, la mayor parte de la obra matemática de Cantor sobre el infinito es inexpugnable.

Sin embargo, se han descubierto nuevos problemas y nuevas paradojas suscitadas en ciertas partes de la estructura de Cantor, debido a ciertas dificultades intrínsecas de la lógica clásica Se centran en torno al uso de la palabra "todo" Las paradojas que se encuentran en la conversación ordinaria tales como "Todas las generalidades son falsas, incluso ésta" constituyen un verdadero problema en los fundamentos de la lógica, como lo fue la paradoja de Epiménides, de donde provienen En ella, se hace decir a un cretense que todos los cretenses son embusteros, lo cual si es cierto, convierte en mentiroso al que habla por decir la verdad. Para tratar este tipo de paradojas, la escuela logística inventó una "Teoría de Tipos" La teoría de tipos y el axioma de reductibilidad, sobre el cual se basa, deben ser aceptados como axiomas a fin de evitar paradojas de esta clase Para poder lograr esto se requiere una reforma de la lógica clásica, la cual, por otra parte, ya se ha emprendido. Como ocurre con la mayoría de las reformas, no es del todo satisfactoria —ni aun para los reformadores— pero mediante su teoría de tipos se ha eliminado el último vestigio de inconsistencia de la casa que Cantor construyó La teoría de los transfinitos puede todavía ser absurda para muchos matemáticos, pero es, sin duda alguna, consistente. La grave acusación de Henri Poincaré, contenida en su aforismo: "*La logistique n'est plus stérile; elle engendre la contradiction*", fue bien refutada por la doctrina logística en lo que atañe al infinito.

A los alephs de Cantor pues, podemos atribuir la misma existencia que al número 7 Puede hacerse, con respecto a cualquiera de ellos, una proposición de existencia libre de contradicción en sí misma En última instancia, no hay razón valedera para confiar más en lo finito que en lo infinito. Es tan permisible descartar al infinito como lo es el negar las impresiones de nuestros sentidos No es ni más ni menos científico proceder así. En último análisis, esto es una cuestión de

fe y discernimiento, pero *no* es comparable a creer o no en los Reyes Magos. Las clases infinitas, al ser juzgadas por normas finitas, engendran paradojas mucho más absurdas y muchísimo menos agradables que la creencia en los Reyes Magos, pero cuando se las juzga con normas adecuadas pierden su rara apariencia y se comportan en una forma tan predicable como cualquier número entero finito

Al final, en su propio escenario, el infinito ha asumido una posición respetable al lado del finito, tan real y tan se gura como la de éste, si bien enteramente distinta en carácter. Sea lo que fuere el infinito, ha dejado de ser una vaca color púrpura.

III. PIE (π. *i*, e): TRASCENDENTES E IMAGINARIOS

A fin de alcanzar la Verdad, es necesario, una vez en la vida, poner todo en duda —hasta donde sea posible.

DESCARTES

Tal vez la ciencia pura comience donde termina el sentido común; acaso, como dice Bergson: "La inteligencia se caracteriza por una falta natural de comprensión de la vida[27]". Pero ni tenemos que predicar paradojas, ni que convencer con epigramas. Lo que ocurre es que el estudio de la ciencia, particularmente las matemáticas, lleva a menudo a la conclusión de que basta decir que una cosa es increíble o imposible, para que la ciencia le demuestre que está equivocado. Para el buen sentido común resulta natural que la Tierra sea plana y que esté inmóvil, que los chinos y los antípodas caminen suspendidos por los pies como las arañas de luces, que las rectas paralelas nunca se encuentren, que el espacio sea infinito, que los números negativos sean tan poco reales como las vacas negativas, que –1 no tenga raíz cuadrada, que una serie infinita debe tener una suma infinita, o que debe ser posible, con regla y compás únicamente, construir un cuadrado cuya superficie sea exactamente igual a la de un círculo dado.

Pero, ¿hasta dónde hemos sido conducidos por el sentido común para llegar a estas conclusiones? ¡No muy lejos! Y sin embargo, algunas de esas proposiciones parecen enteramente plausibles, más aún. Irreprochables. Sería erróneo afirmar que la ciencia ha demostrado que todas son falsas. Podemos, todavía adherirnos a la hipótesis euclidiana de que las rectas paralelas nunca se encuentran y que permanecen siempre equidistantes, mientras recordemos que se trata solamente de una hipótesis, pero las proposiciones acerca de la cuadratura

[27] Henri Bergson, *Evolución Creadora*.

del círculo, la raíz cuadrada de 1 y las referentes a las series infinitas, pertenecen a una categoría distinta.

El círculo no *puede* ser convertido en un cuadrado equivalente utilizando sólo regla y compás. –1 *tiene* raíz cuadra da. Una serie infinita *puede* tener una suma finita Tres símbolos: π, *i, e,* han permitido a los matemáticos demostrar estas proposiciones, tres símbolos que representan los frutos de siglos de investigación matemática. ¿Hasta qué punto se ajustan al sentido común?

El problema más famoso en toda la historia de las matemáticas es la "cuadratura del círculo". Otros dos problemas que desafiaron a los geómetras griegos, la "duplicación del cubo" y la "trisección del ángulo" pueden ser sucintamente examinados junto con el primero, como temas de interés, aun cuando sólo en la cuadratura del círculo interviene π.

En la infancia de la geometría se descubrió que era posible medir la superficie de una figura limitada por líneas rectas. En realidad, la geometría fue ideada con esa misma finalidad, medir los campos del valle del Nilo, donde cada año las inundaciones provocadas por las crecidas del río arrasaban todas las marcas puestas por el agricultor para delimitar sus campos de los de sus vecinos. La medición de áreas limitadas por líneas curvas presentaba mayores dificultades, y se empeñaron en reducir cada problema de este tipo a uno de medir superficies con lindes rectas. Evidentemente, si puede construirse un cuadrado de área igual a la de un circulo dado, midiendo el área del cuadrado, queda determinada la del círculo La expresión "cuadratura del círculo procede de esta tentativa de solución

El número π es la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro El área de un círculo de radio r está dada por la fórmula: πr^2. Ahora bien, el área de un cuadrado cuyo lado mide *A*, es A^2. De este modo la expresión algebraica $A^2 = \pi r^2$ indica la equivalencia de área entre un cuadrado y un círculo dados. Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros de esta ecuación, se obtiene: $A = r\sqrt{\pi}$. Como *r* es una cantidad

conocida, el problema de la cuadratura del círculo queda reducido, en efecto, el cálculo del valor de π [28] Puesto que los matemáticos han logrado calcular π con extraordinaria exactitud, ¿qué significa entonces la proposición: "Es imposible convertir un círculo en un cuadrado equivalente?" Desgraciadamente este asunto suscita muchos conceptos erróneos que desaparecerían si el problema fuese comprendido.

Se proclama que la cuadratura del círculo es *imposible:* pero, ¿qué significa "imposible" en matemáticas? El primer buque a vapor que cruzó el Atlántico, llevaba, entre su cargamento, un libro que "demostraba" que era imposible, para un buque a vapor, cruzar nada, y mucho menos el Atlántico La mayor parte de los sabios de hace algunas generaciones "demostraron" que sería siempre imposible inventar una máquina voladora más pesada que el aire El filósofo francés Augusto Comte, demostró que sería siempre imposible, para la mente humana, descubrir la composición química de las estrellas. Sin embargo, poco tiempo después de hecha esta afirmación, se aplicó el espectroscopio para analizar la luz proveniente de las estrellas y hoy sabemos más acerca de su composición química, incluidas las estrellas pertenecientes a las nebulosas más distantes, de lo que sabemos del contenido de nuestro botiquín. Como ilustración, diremos que el helio fue descubierto en el Sol antes de serlo en la Tierra.

Los museos y las oficinas de patentes están atestadas de cañones, relojes y desmotadoras de algodón, ya anticuados, cada uno de los cuales dio por tierra con predicciones de que su invención era imposible. Un hombre de ciencia que afirma que una máquina o un proyecto es imposible, sólo revela las limitaciones de su época. Cualesquiera que sean las intenciones del profeta, su predicción no tiene ninguna de las cualidades de la profecía. "Es imposible volar hasta las estrellas" es

[28] Es muy sencillo determinar geométricamente la raíz cuadrada de una longitud dada.

un sinsentido, mientras que "aún no hemos inventado un medio para volar hasta las estrellas" sí lo tiene.

Las proposiciones acerca de la imposibilidad en matemáticas son de un carácter completamente distinto. Un problema en matemáticas que no podrá ser resuelto en los siglos venideros no siempre es imposible. "Imposible", en matemáticas, significa *teóricamente* imposible y no tiene nada que ver con el estado actual de nuestros conocimientos. "Imposible", en matemáticas no caracteriza al proceso de hacer una bolsa de seda de la oreja de una puerca, o una oreja de puerca de una bolsa de seda; sí caracteriza la tentativa de demostrar que 7 por 6 es igual a 43 (a pesar de que las personas que flojean en aritmética logran, a menudo, lo imposible). Por las reglas de la aritmética. 7 por 6 es igual a 42, así como, de acuerdo a las reglas del ajedrez un peón debe efectuar, por lo menos. 5 movimientos antes de que pueda ser convertido en reina.

Cuando se carece de demostración teórica de que un problema no puede ser resuelto, es legítimo buscar una solución, no importa cuán improbable sea la esperanza de buen éxito. Durante siglos la construcción de un polígono regular de 17 lados fue correctamente considerada difícil, falsamente considerada imposible, por cuanto Gauss, a los diecinueve años de edad, en 1796, logró hallar una construcción elemental[29]. Por

[29] Gauss hizo un estudio completo para determinar qué otros polígonos podían construirse con regla y compás Los griegos habían podido construir polígonos regulares de 3 y de 6 lados pero no los de 7 de 11 o de 13 lados. Gauss, con maravillosa precocidad dio la fórmula que demostró cuáles polígonos se podían construir de la manera clásica. Se había creído que sólo podían construirse así los polígonos regulares cuyo número de lados podía expresarse como 2^n, $2^n \times 3$, $2^n \times 5$, $2^n \times 15$ (donde n es un número entero). La fórmula de Gauss demuestra que los polígonos con un *número primo* de lados pueden construirse de la siguiente manera Sean P el número de lados y n cualquier número entero hasta 4 luego: $P = 2^{2^n} + 1$. Si $n = 0, 1, 2, 3, 4$; $P = 3, 5, 17, 257, 65537$ Donde n es mayor que 4 no hay números primos conocidos de la forma $2^{2^n} + 1$.

(Un *número primo* es aquel que sólo es divisible por sí mismo o por el uno. De este modo. 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17 son ejemplos de números primos. Una famosa prueba de Euclides, que aparece en sus *Elementos* demuestra que el número de números primos es infinito. (*Véase nota 44 del capítulo V.*)

otra parte, muchos problemas famosos, tales como el último teorema de Fermat[30] han desafiado toda solución hasta la fecha, a pesar de heroicas investigaciones. Para determinar si tenemos derecho a decir que la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo son *imposibles*, debemos encontrar demostraciones lógicas, basadas en un razonamiento puramente matemático. Una vez que se han aducido dichas pruebas, continuar buscando una solución equivale a cazar un bípedo de tres pies.[31]

Habiendo determinado lo que los matemáticos entienden por imposible, el simple enunciado "es imposible convertir el círculo en un cuadrado equivalente", queda todavía sin sentido. Para dárselo, debemos especificar *cómo* debe ser convertido el círculo en un cuadrado equivalente. Cuando Arquímedes dijo; "Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra" no estaba haciendo alarde de su fuerza física, sino que estaba enalteciendo el principio de la palanca. Cuando se dice que un círculo no puede ser convertido en un cuadrado equivalente, todo lo que ello significa es que esto no *puede hacerse con regla* y *compás solamente*, aunque la operación llegue a ser posible con ayuda de un integrador gráfico o mediante curvas de grado superior a dos.

Repitamos el problema: Se pide construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, mediante un dibujo teóricamente exacto, usando únicamente dos instrumentos: la regla

---

Es un hecho verdaderamente sorprendente que de todos los polígonos posibles cuyo número de lados es un número primo, solamente los cinco ya indicados pueden construirse con regla y compás.

[30] Ver capítulo V.

[31] Hace muchísimo tiempo, en el año 1775, la Academia de París estaba tan abrumada con pretendidas soluciones de la cuadratura del círculo, de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo, que aprobó una resolución prohibiendo, para lo sucesivo, la aceptación de las mismas. Pero en esa época sólo se sospechaba la imposibilidad de estas soluciones, pues aún no se la había demostrado matemáticamente; de este modo, el arbitrario proceder de la Academia sólo puede explicarse en base a su propia conservación.

y el compás. Se entiende por regla el sencillo instrumento conocido para trazar una línea recta, no para medir longitudes. Por compás entendemos un instrumento con el cual se puede dibujar un círculo, con cualquier centro y cualquier radio. Ambos instrumentos deben usarse un número finito de veces a fin de no tener que recurrir a procesos de límites o de convergencia que requieran un número infinito de pasos[32]. La construcción, de razonamiento puramente lógico y fundada tan sólo en los axiomas y teoremas de Euclides, debe ser absolutamente exacta.

Los conceptos de "límite" y "convergencia" serán explicados con más detalles más adelante[33], pero conviene aquí que nos refiramos brevemente a ellos.

Consideremos la ya conocida serie: 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + … La suma de los 5 primeros términos de esta serie es 1.9375; la suma de los primeros 10 términos es 1,9980...; para los primeros 15 términos su suma da: 1,999781... Se ve claramente que esta serie tiende a "redondearse"; es decir, los términos adicionales que se le agregan se hacen tan pequeños que aun un número inmenso de ellos no logrará hacer que la serie crezca más allá de una cota finita. En este caso la cota o límite es 2. Una serie semejante se dice que "*converge*" a un *"límite"* [34].

Las analogías geométricas de los conceptos de límite y convergencia son igualmente provechosas. Un círculo puede ser considerado como el límite de los polígonos con un número creciente de lados que pueden inscribirse sucesivamente en

[32] Para calcular *n* se emplearon, como pronto veremos, procesos de límites y de convergencia con un infinito número de pasos.

[33] Véase el capítulo sobre el Cálculo infinitesimal.

[34] La mayor parte de las series infinitas son *divergentes*, es decir, la suma de la serie *supera* a cualquier número entero prefijado Una típica serie divergente es: 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + … Esta serie parece diferir muy poco de la serie convergente dada en el texto, y únicamente las más sutiles operaciones matemáticas revelan si una serie es *convergente o divergente*.

él, o circunscribirse alrededor de él y su área como el límite común de estos dos conjuntos de polígonos.

Ésta no es una definición rigurosa de límite y convergencia, pero a menudo el rigor matemático sólo sirve para provocar otra clase de rigor —el *rigor mortis* de la creación matemática.

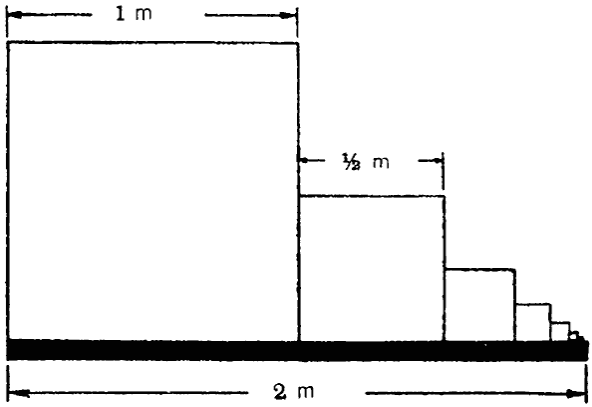


Fig. 15. Un número infinito de términos con una suma finita Si el ancho del primer tramo es un metro, el del segundo 1/2 metro, el del tercero V4 de metro el cuarto 1/8 de metro, y así sucesivamente, cabe un número infinito de tramos, que guardan entre si esa relación, en la varilla de dos metros de longitud, es decir:

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots = 2$$

Volviendo a la cuadratura del círculo: los griegos, y los matemáticos que los sucedieron, buscaron una construcción exacta con regla y compás, pero siempre fracasaron. Como veremos luego, todas las construcciones en que intervienen la regla y el compás son equivalentes geométricos de ecuaciones *algebraicas* de primero y segundo grado y de combinaciones de tales ecuaciones Pero el matemático alemán Lindemann, en el año 1882, demostró que π es un número *trascendente* y, de este modo, cualquier ecuación de coeficientes enteros a la que satisfaga no puede ser algebraica, y mucho menos algebraica de primero o de segundo grado. De ello se deduce que

el enunciado: "La cuadratura del círculo es imposible con regla y compás solamente" es una expresión plena de sentido.

En lo que se refiere a los otros dos problemas, gracias en parte a la obra de "ese maravilloso muchacho, que murió en plena juventud", el joven Galois, de dieciséis años de edad, se estableció, hace aproximadamente cien años, que la duplicación del cubo y la trisección del ángulo son también imposibles con regla y compás Daremos de ellos una sucinta referencia.

Existe una leyenda entre los griegos, según la cual el problema de la duplicación del cubo se originó en una visita al Oráculo de Delfos. En esa época había una fuerte epidemia y el oráculo anunció que la misma cesaría únicamente si se duplicaba en tamaño un altar cúbico dedicado a Apolo. Los albañiles y arquitectos cometieron el error de *duplicar* la arista del cubo, con lo cual el volumen resultó *ocho* veces mayor. Por supuesto, el oráculo no quedó satisfecho y los matemáticos griegos, al examinar nuevamente el problema, comprendieron que la solución correcta implicaba, no la duplicación del lado, sino su multiplicación por la raíz cúbica de 2. Pero esto no podía resolverse geométricamente con regla y compás, y sólo finalmente culminaron la tarea con éxito empleando otros instrumentos y curvas de grado superior. El oráculo fue aplacado y la epidemia cesó. Se podrá creer la leyenda o no, como se prefiera, pero no es posible "duplicar el cubo" [35].

La trisección del ángulo ha recibido mucha atención en los últimos años, porque continúan aflorando monografías que pretenden resolver el problema por completo. Las falacias

[35] Puede duplicarse un cuadrado dibujando otro cuadrado cuyo lado sea la diagonal del primero, pero no puede duplicarse un cubo, porque esta operación involucra la raíz cúbica de 2, y ésta, al igual que *n*. no es raíz de una ecuación algebraica de primero o segundo grado y, por lo tanto, no puede construirse con regla y compás. En el espacio de cuatro dimensiones, la figura que corresponde al cubo, llamada "*tesseract*" (ver cap. IV), *puede* duplicarse con regla y compás, porque la raíz cuarta de 2, que es la que se requiere, puede escribirse como la raíz cuadrada de la raíz cuadrada de 2.

contenidas en estas "soluciones" son de cuatro clases: algunas veces son solamente aproximadas y no exactas; de vez en cuando se usan otros instrumentos además de la regla y el compás, ya sea a sabiendas o inconscientemente; a veces hay un sofisma lógico en la demostración que se intenta y a menudo se consideran únicamente ángulos especiales y no generales. Un ángulo puede ser bisecado pero no trisecado por los medios que proporciona la geometría elemental, ya que el primer problema implica simplemente raíces cuadradas, mientras que el segundo se resuelve con raíces cúbicas las que, como hemos visto, no pueden construirse con regla y compás

La dificultad para cuadrar el círculo, como se dijo al principio, radica en la naturaleza del número π. Este notable número, como demostró Lindemann, no puede ser raíz de una ecuación algebraica de coeficientes enteros[36]. No es expresable, por lo tanto, mediante operaciones racionales o por la extracción de raíces cuadradas, y como sólo estas operaciones admiten una construcción equivalente hecha con regla y com-

[36] ¿Qué significa "la raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros? Una palabra es suficiente para estimular la memoria de aquellos que han pasado por un curso de álgebra elemental. La raíz de una ecuación es el valor por el que debe sustituirse la incógnita a fin de satisfacer la ecuación. Así, en la ecuación $x - 9 = 0$, la raíz es 9, ya que si usted reemplaza 9 en lugar de x. la ecuación se satisface. Análogamente –4 y 4 son las raíces de la ecuación- $x^2 - 16 = 0$, porque cuando cualquiera de los dos valores sustituye a x, la ecuación se cumple. Las ecuaciones "algebraicas" constituyen el tipo de ecuaciones de las que nos hemos ocupado hasta ahora. Pero hay también ecuaciones trigonométricas, diferenciales y otras El término "algebraico" tiene por finalidad distinguir ecuaciones de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a = 0$$

Los *coeficientes* de una ecuación son los números que aparecen delante de la cantidad o cantidades desconocidas En la ecuación

$$3x^4 + 17x^3 + \sqrt{2}\,x^2 - ix + \pi = 0$$

3, 17, $\sqrt{2}$, i y π son los coeficientes. Éste es un ejemplo de una ecuación algebraica con coeficientes extraños. Al definir una ecuación algebraica se exige que n sea un número entero positivo y que las a sean números enteros.

pás, es imposible cuadrar el círculo. La parábola es una curva más complicada que la circunferencia, pero, sin embargo, como ya sabía Arquímedes, cualquier área limitada por una parábola y una línea recta puede determinarse mediante operaciones racionales y, en consecuencia, la "parábola puede ser convertida en un cuadrado equivalente".

La demostración de Lindemann es demasiado técnica para ocuparnos de ella aquí. Sin embargo, si consideramos la historia y el desarrollo de *n.* estaremos en mejores condiciones para comprender su finalidad, sin estar obligados a conocer a fondo sus dificultades.

Si se *inscribe* un triángulo en un círculo (fig. 16), el área del triángulo inscrito será menor que el área del círculo.

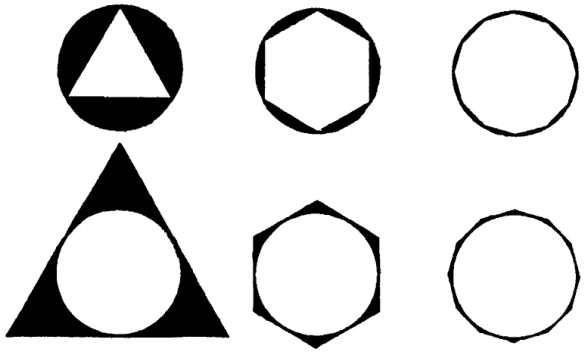


Fig. 16. El círculo como límite de polígonos inscritos y circunscritos.

La diferencia entre el área del círculo y la del triángulo es igual a las tres partes sombreadas del círculo. Consideremos ahora el mismo círculo con un triángulo *circunscrito* a su alrededor (fig. 16). El área del triángulo circunscrito será mayor que el área del círculo. Las tres partes sombreadas del triángulo representan, nuevamente, la diferencia en área Se verá fácilmente que si se duplica el número de lados de la figura inscrita, el área del hexágono resultante será menor que el área del círculo, pero se le aproximará más que el área del triángulo inscrito. Análogamente, si se duplica el número de lados del triángulo circunscrito, el área del hexágono circuns-

crito seguirá siendo mayor que el área del círculo, pero, nuevamente, se acercará más a su superficie que el triángulo circunscrito.

Por métodos geométricos, simples y muy conocidos, empleando solamente regla y compás, puede duplicarse, tantas veces como se quiera, el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos. El área de los polígonos sucesivamente inscritos se aproximará a la del círculo, pero siempre quedará *ligeramente menor;* el área de los polígonos circunscritos se aproximará también a la del círculo, pero su superficie permanecerá siempre *ligeramente mayor*. El valor común al que se aproximan ambas es el área del circulo En otras palabras, el circulo es el *límite* de estas dos sucesiones de polígonos. Si el radio del círculo es igual a 1, su área, dada por πr^2, es simplemente igual a π.

Este método de ir aumentando el número de lados de los polígonos, empleado para calcular el valor de π ya era conocido por Arquímedes, quien, mediante polígonos de 96 lados, demostró que π es menor que 3 1/7 y mayor que 3 10/71.

En alguna parte, entre ambos, se encuentra el área del círculo. La aproximación dada para π por Arquímedes es considerablemente más perfecta que la dada por la Biblia En el Libro de los Reyes y en las Crónicas, se asigna a *n* el valor de 3. Los matemáticos egipcios dieron un valor algo más aproximado: 3.16. El conocido decimal: 3,1416, que aparece en nuestros libros escolares, era ya habitual en tiempos de Tolomeo, 150 años d.C.

Teóricamente, el método de Arquímedes para calcular π, aumentando el número de los polígonos, puede extenderse indefinidamente, pero los cálculos necesarios, pronto se hacen muy engorrosos. Ello no obstante, durante la Edad Media dichos cálculos fueron realizados apasionadamente.

Francisco Vieta, el más eminente matemático del siglo XVI, aunque no de profesión, hizo un gran progreso en el cálculo de π, determinando su valor hasta diez cifras decimales Además dio la fórmula:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}} \ldots}$$

que constituye un producto decimal, e hizo muchos otros importantes descubrimientos matemáticos. Vieta prestó servicios al rey Enrique IV de Francia, en la guerra contra España, descifrando cartas interceptadas dirigidas por la Corona Española a sus gobernantes en los Países Bajos. Los españoles quedaron tan impresionados que atribuyeron a la magia su descubrimiento de la clave. No fue ni la primera ni la última vez que los esfuerzos de los matemáticos fueron infamados con el estigma de la brujería.

En 1596 el matemático aleman Ludolf van Ceulen, que residió por largos años en Holanda, calculó π con 35 cifras decimales. En lugar del epitafio, "muerto a los 40, enterrado a los 60", a propósito de que la función cerebral cesa precisamente cuando se supone que la vida recién comienza, van Ceulen que trabajó con el número π casi hasta el día de su muerte, ocurrida a los 70 años de edad, pidió que se inscribieran sobre la lápida de su sepulcro, como un digno epitafio, los 35 dígitos con que calculó π. Su deseo fue cumplido. El valor que dio para π es, en parte: 3,14159265358979323846... En recuerdo de su hazaña, los alemanes llaman todavía a π el número ludolfiano. Nosotros proponemos denominarlo el número arquimediano.

El número π alcanzó la madurez con la invención del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz. Se abandonó entonces el método griego y estuvieron de moda los recursos puramente algebraicos de series infinitas convergentes, productos infinitos y fracciones continuas. El inglés John Wallis (1616-1703) propuso uno de los más famosos productos:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \ldots$$

La serie infinita de Leibniz, a diferencia del producto de Wallis para determinar π es una suma:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots$$

Los sucesivos productos y sumas de los términos de estas series dan valores de π tan exactos como se desee. Estos métodos, típicos de los poderosos medios de aproximación usados no sólo en las matemáticas, sino también en otras ciencias, aunque son mucho menos engorrosos que el método empleado por los griegos, exigen, a pesar de eso, muchos cálculos. Los productos de la serie de Wallis son:

$$\frac{2}{1} = 2, \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}, \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{45}, etc.$$

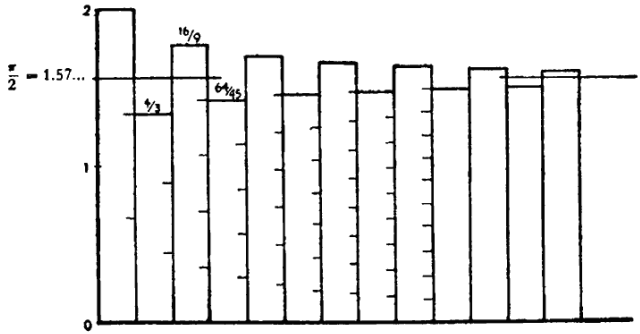


Fig. 17 Producto de Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}57\ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \ldots$$

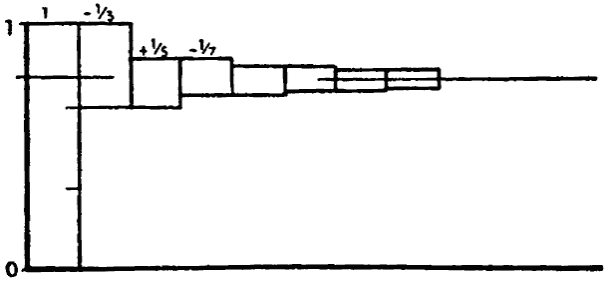
Tomando las sucesivas sumas de la serie de Leibniz, obtenemos:

$$1, 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{13}{15}, 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{76}{105}, etc.$$

Después de tomar los primeros 50 términos de estas series, los próximos 50 no producirán un valor de π sensiblemente más exactos, puesto que la serie converge más bien lentamente. La serie rápidamente convergente:

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\times 5^3}+\frac{1}{5\times 5^5}-\frac{1}{7\times 5^7}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\times 239^3}+\frac{1}{5\times 239^5}-\frac{1}{7\times 239^7}+\cdots\right)$$

es mucho más útil y se le emplea frecuentemente en las matemáticas modernas Su relación con π fue establecida por Machín (1680-1752). Utilizando series de convergencia aún más rápida. Abraham Sharp, en 1699, calculó π con 71 cifras decimales. Dase, un calculista relámpago empleado por Gauss, obtuvo 200 cifras decimales en el año 1824. En 1854. Richter lo calculó hasta 500 decimales, y finalmente, en 1873, Shanks, un matemático inglés, alcanzó una curiosa clase de inmortalidad, determinando π con 707 decimales. Shanks dedicó veinte años al cálculo de las 707 cifras decimales de π; desdichadamente, cometió un error en el decimal 528 (descubierto en 1945), y a partir de él todos los restantes están mal. Los métodos de cálculo electrónico actuales han permitido calcular más de un millón de cifras decimales de π, y el camino está abierto para que puedan alcanzarse los millones de cifras que se quiera. Con todo, ello no representa un despilfarro de tiempo comparado con los billones de horas invertidas por millones de personas para resolver crucigramas y hacer "contratos" de bridge, por no aludir a los debates políticos.



Fig, 18: Serie de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Por supuesto que estos resultados no tienen uso concebible en las ciencias aplicadas. Aun en los trabajos que requieren mayor precisión no se necesitan ordinariamente más de diez cifras para π. El famoso astrónomo y matemático norteamericano Simón Newcomb hizo notar en una ocasión: "Diez cifras decimales son suficientes para dar la circunferencia de la Tierra hasta la fracción de una pulgada, y treinta decimales darían la circunferencia de todo el Universo visible hasta una cantidad imperceptible con el más poderoso telescopio".

¿Por qué, entonces, se ha dedicado tanto tiempo y esfuerzo a calcular π? Hay dos razones para justificarlo Primera: los matemáticos tenían la esperanza de que, estudiando series infinitas, podrían hallar alguna clave sobre su naturaleza trascendente. Segunda: el hecho de que π, una razón puramente geométrica, pudiera obtenerse de tantas relaciones aritméticas —de series infinitas con poca o ninguna relación aparente con la geometría— era una interminable fuente de admiración y estímulo a la actividad matemática.

¿Quién podría imaginar —es decir, quién sino un matemático— que el número que expresa una relación fundamental

entre el círculo y su diámetro podría resultar de la curiosa fracción comunicada por lord Brouncker (1620-1684) a John Wallis?

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + 7^2 \ldots}}}}$$

Pero, precisamente, semejantes relaciones entre las series infinitas y π son ejemplos de la profunda conexión que existe entre la mayoría de las formas matemáticas, geométricas o algebraicas. Es una simple coincidencia, una mera casualidad, el que π esté definido como la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro. No importa cómo se relacionen entre sí las diversas partes de las matemáticas, π constituye en ellas una parte integrante[37]. En su obra *Budget of Paradoxes*, Augustus De Morgan da un ejemplo de cuán poco sugiere acerca de su origen la definición usual de π. El autor nombrado explicaba a un actuario cuáles eran las probabilidades para que, al cabo de un tiempo dado, cierta proporción de un grupo de personas siguiera viviendo y citó la fórmula empleada por los actuarios, en la que, como es sabido, interviene π. Explicando el significado geométrico de π, el actuario, que lo había estado escuchando con interés, lo interrumpió exclamando "Mi querido amigo, eso debe ser un error ¿Qué tiene que ver un círculo con el número de personas sobrevivientes al cabo de un tiempo dado?"

Recapitulando brevemente, el problema de la cuadratura del círculo resulta ser una construcción imposible si únicamente se usan regla y compás Las únicas construcciones posibles con estos instrumentos corresponden a ecuaciones algebraicas de primero y segundo grados. Lindemann demostró que π no solamente no es la raíz de una ecuación algebraica de primero o segundo grados, sino tampoco es la raíz de

[37] Véase el Problema de la aguja, de Buffon en el capítulo VII.

ninguna ecuación algebraica (con coeficientes enteros), no importa cuán grande sea el grado; en consecuencia, π es trascendente. Aquí, pues, está el fin de toda esperanza para demostrar este problema clásico de la manera deseada. Aquí hay imposibilidad matemática.

Cuando los filósofos griegos descubrieron que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional[38], celebraron el descubrimiento sacrificando 100 bueyes. El descubrimiento, mucho más profundo, de que π es un número trascendente merece un sacrificio mayor. Una vez más los matemáticos triunfaron sobre el sentido común; π, un número finito —la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro— es expresable con exactitud únicamente como la suma o producto de una serie infinita de números totalmente diferentes y aparentemente no relacionados. El área de la más sencilla de todas las figuras geométricas, el círculo, no puede determinarse por medios finitos (Euclidianos).

e

En el siglo XVII, tal vez el más grandioso de todos en lo que al desarrollo de las matemáticas se refiere, apareció una obra que en la historia de la ciencia botánica puede colocarse en segundo lugar, a continuación de la monumental *Principia* de sir Isaac Newton. En 1614, John Napier, de Merchiston, publicó su *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Una descripción de la admirable tabla de logaritmos), el primer tratado sobre logaritmos[39]. A Napier, que también inventó el

[38] La $\sqrt{2}$ cuando se escribe en forma decimal es tan complicada como π, debido a que nunca se repite, nunca termina y no existe ley conocida que indique la sucesión de sus dígitos, sin embargo, este complicado decimal puede obtenerse fácilmente y con exactitud mediante una construcción hecha con regla y compás pues es la diagonal de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad.

[39] Jobst Bürgi, de Praga había preparado tablas de logaritmos antes que apareciese la obra *Descriptio* de Napier. Sin embargo recién en 1620, Bürgi publicó son tablas pues como el mismo lo explicó, se hallaba ocupado en la solución de otro problema.

punto decimal, le debemos una invención que es tan importante para las matemáticas como los números arábigos; el concepto de cero y el principio de la notación posicional[40]. Hasta hace muy pocos años, sin éstos, las matemáticas no habrían progresado probablemente mucho más allá del grado que habían alcanzado hace 2.000 años. Sin los logaritmos, los cálculos efectuados con facilidad por cualquier matemático neófito agotarían las energías de los más grandes matemáticos.

Ya que *e* y los logaritmos tienen el mismo árbol genealógico y se desarrollaron juntos, podemos, por el momento, volver nuestra atención hacia los logaritmos para descubrir algo de la naturaleza del número *e*.

Para confeccionar las tablas trigonométricas empleadas en la navegación y en la astronomía se requerían cálculos desmesurados y, en consecuencia, se le sugirió a Napier que inventara algún artificio para facilitar esos cálculos. Contemporáneos suyos, como Vieta y Ceulen, rivalizaron entre sí para llevar a cabo proezas aritméticas casi increíblemente difíciles, las cuales, aun en el mejor de los casos, resultaban ser una tarea de un trabajo sublime y penoso y una autoinmolación; con frecuencia toda esta labor se perdía como resultado de un pequeño descuido.

Napier tuvo buen éxito en el logro de su propósito; abreviar las operaciones de multiplicación y división, operaciones "tan fundamentales en su naturaleza, que acortarlas parece imposible". Sin embargo, mediante los logaritmos, todo problema de multiplicación y división, no importa cuán complicado sea, se reduce a una suma o resta relativamente sencilla. Multiplicar y dividir gúgoles y gúgolplexes resulta tan simple como sumar una insignificante columna de números.

Al igual que muchas otras de las fecundas y profundas invenciones en las matemáticas, la idea sobre la cual se basaban

[40] De acuerdo al principio de la notación posicional, el valor de un dígito depende de su posición con relación a los otros dígitos del número en el cual aparece.

era tan simple que uno se asombra al pensar que, hasta entonces, a nadie se le hubiera ocurrido. Cajori refiere que Henry Briggs (1556-1631), profesor de geometría en Oxford, "quedó tan impresionado al admirar el libro de Napier, que dejó sus estudios en Londres para ir a rendir homenaje al filósofo escocés". Briggs sufrió un atraso en su viaje y Napier se quejaba a un amigo común: "Ah. John. Mr. Briggs no vendrá.". En ese mismo momento se oyó llamar a la puerta y Briggs fue introducido al gabinete del lord. Ambos se quedaron casi un cuarto de hora contemplándose mutuamente, sin articular palabra alguna. Al final comentó Briggs: "Milord, he emprendido expresamente este largo viaje para conocerlo y saber por qué rasgo de talento o de inventiva llegó usted, antes que nadie, a idear esta excelente ayuda para la astronomía, es decir, los logaritmos; pero, milord, lo que más me maravilla es que nadie los haya descubierto antes, cuando ahora, que los conocemos, resultan tan fáciles."

El concepto que tenía Napier de los logaritmos se basaba en una idea ingeniosa y bien conocida: una comparación entre dos puntos animados de movimiento, uno de los cuales engendra una progresión aritmética y el otro, una progresión geométrica.

Las dos progresiones.

Aritmética	0	1	2	3	4	5	6	7	8 …
Geométrica	1	2	4	8	16	32	64	128	256 …

muestran, una con respecto a la otra, esta interesante relación: Si se consideran como exponentes (potencias) de 2, a los términos de la progresión aritmética, los términos correspondientes de la progresión geométrica representan la cantidad resultante de efectuar la operación indicada. Así[41], $2 = 1$, $2^1 =$

[41] Las reglas para operar con exponentes en la multiplicación y en la división son:

A ***Multiplicación***

$a^m \times a^n = a^{m+n}$; así o

$a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$; o.

2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$. etc. Además, para determinar el valor del producto $2^{\cdot} \times 2^3$, solamente es necesario sumar los exponentes, obteniendo: $2^{2+3} = 2^5$ que es el producto deseado. Llamando a 2, la *base, cada término de la progresión aritmética es el LOGARITMO del término correspondiente de la progresión geométrica.*

Napier explicó geométricamente esta noción de la siguiente manera: Un punto S se mueve a lo largo de la línea recta. *AB,* con una velocidad en cada punto S_1 proporcional a la distancia restante S_1B. Otro punto *R* se mueve sobre una línea ilimitada, *CD,* con una velocidad uniforme igual a la velocidad inicial de *S.* Si ambos puntos parten de *A* y *C* al mismo tiempo, el *logaritmo* del número medido por la distancia S_1B está dado por la distancia CR_1.

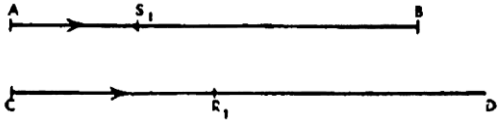


Fig. 19. Interpretación dinámica de Napier de los logaritmos.

Por este método, a medida que S_1B decrece, su logaritmo CR_1 aumenta. Pero pronto se puso de manifiesto que era conveniente definir el logaritmo de 1 como cero y que el logaritmo creciera con el número. De conformidad con ello, Napier cambió su sistema.

$a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^5$

B ***División***

$a^m / a^n = a^{m-n}$

$a^3 / a^2 = a^{3-2} = a$

Pero si *m* es igual a n.

$a^m / a^n = a^0 = ?$

$a^3 / a^3 = a^{3-3} = a^0 = ?$

$a^3 / a^3 = \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} / \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} = 1$

Por lo tanto, convenimos en que

$a^0 = 1$

Uno de los frutos de la educación superior es la opinión luminosa de que un logaritmo es simplemente un número que se encuentra en una tabla. Tendremos que ampliar el plan de estudios. Si *a*, *b* y *c* son tres números relacionados entre sí por la ecuación. $a^b = c$. entonces *b*, el exponente de *a*, es el logaritmo de *c en base a*. En otras palabras, el logaritmo de un número en base *a* es la potencia a la cual debe elevarse *a*, para obtener dicho número. En el ejemplo: 2 = 8, el logaritmo de 8 en base 2 es 3. O bien, en $10^2 = 100$, el logaritmo de 100 en base 10 es 2. La manera concisa de expresar esto es: $3 = \log_2 8$, $2 = \log_{10} 100$. La sencilla tabla que va a continuación resume las propiedades esenciales de los logaritmos:

(1) $\log_a (b \times c) = \log_a b + \log_a c.$
(2) $\log_a (b / c) = \log_a \mathrm{b} - \log_a c.$
(3) $\log_a b^c = c \times \log_a b.$
(4) $\log_a \sqrt[c]{b} = (1/c) \log_a b.$

Las ecuaciones (1) y (2) indican cómo multiplicar o dividir dos números; no se requiere otra cosa que sumar o restar sus respectivos logaritmos. El resultado obtenido es el logaritmo del producto, o del cociente. Las ecuaciones (3) y (4) enseñan que, con ayuda de los logaritmos, las operaciones de elevar a potencias o extraer raíces pueden ser reemplazadas por las mucho más sencillas de multiplicar y dividir.

Pronto se construyeron extensas tablas de logaritmos, en base 10 y en base *e*, llamada natural o neperiana. Estas tablas fueron tan distribuidas, que los matemáticos de toda Europa pudieron beneficiarse con el empleo de los logaritmos al cabo de muy poco tiempo después de su invención. Kepler no solamente vio las tablas de Napier, sino que él mismo promovió su desarrollo: fue así uno de los primeros de la legión de hombres de ciencia cuya contribución al conocimiento fue facilitada, en gran medida, por los logaritmos

Los dos sistemas de logaritmos, en las bases 10 y *e* (los de Briggs y de base natural respectivamente), son los principales

que hoy se usan, prevaleciendo los de base *e* [42]. Al igual que π. el número *e* es trascendente y es, como π. lo que P. W Bridgman denomina un "programa de procedimiento", más bien que un número, ya que nunca puede ser expresado completamente: (1) con un número finito de dígitos. (2) como la raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros. (3) como un decimal infinito aunque periódico[43]. Solamente puede expresarse con exactitud como el límite de una serie infinita convergente o de una fracción continua. La más sencilla y más conocida de las series infinitas que dan el valor de *e*, es:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots$$ [44]

Por consiguiente, su valor puede aproximarse tanto como se desee, con sólo tomar términos adicionales de la serie. Hasta la décima cifra decimal: *e* = 2,7182818285. Una mirada a la tabla que va a continuación, indicará cómo se comporta

[42] Debido a que *e* posee ciertas propiedades únicas, valiosas en muchas ramas de las matemáticas, particularmente en el cálculo, debido a la relación existente entre las funciones logarítmicas y las exponenciales, *e* es la base "natural" del sistema logarítmico.

[43] La primera demostración de que *e* es trascendente (es decir, que no es la raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros) fue dada por Hermite, el distinguido matemático francés, en 1873, nueve años antes de que Lindemann demostrara el carácter trascendente de π. Desde entonces, otros matemáticos lograron simplificar la demostración de Hermite, El método general consiste en suponer que *e* sea la raíz de una ecuación algebraica. *f(e)* = 0 y demostrar que puede elegirse un factor *M* tal que. cuando cada miembro de la ecuación se multiplica por *M* (el valor de) *M f(e*) queda reducido a la suma de un número entero *distinto de cero* y un número comprendido entre 1 y 0 demostrando que la suposición de que *e* puede ser la raíz de una ecuación algebraica es insostenible" Véase U G Mitchell and M Strain, en Osiris. *Studies in History of Science* vol. I.

[44] El símbolo ! tal como se usa en matemáticas no indica sorpresa o excitación, aunque en este caso no estaría fuera de lugar ya que la simplicidad y belleza de esta serie es sorprendente. ! significa "tomar el factorial del número detrás del cual aparece !". El factorial de un número es el producto de sus componentes, así: 1! = 1, 2! = 1 × 2, 3! = 1 × 2 × 3, 4! = 1 × 2 × 3 × 4.

una serie infinita convergente a medida que se suman más y más términos:

(1)	1 + 1/1!	= 2
(2)	1 + 1/1! + 1/2!	= 2,5
(3)	1 + 1/1! + 1/2! + 1/3!	= 2,6666666…
(4)	1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4!	= 2,7083334…
(5)	1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5!	= 2.7166666…
(6)	1 + 1/1! + … + 1/6!	= 2.7180555…
(7)	1 + 1/1! + … + 1/7!	= 2.7182539…
(8)	1 + 1/1! + … + 1/8!	= 2.7182787…
(9(	1 + 1/1! + … + 1/9!	= 2.7182818…

Después de tomar algunos términos más, resulta que *e* es igual a:

*2,71828182845904523536028*74...

Euler, que indudablemente tenía en las matemáticas el tacto de Midas, no sólo inventó el símbolo *e* y calculó su valor hasta 23 decimales, sino que dio para él varias expresiones muy interesantes, de las cuales estas dos son las más importantes:

(1)

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + 5\,...}}}}}$$

(2)

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 \ldots}}}}}}}}$$

No sólo fue causa del gran desarrollo alcanzado por los logaritmos la necesidad de tablas para la navegación. También los grandes negocios, particularmente los bancos, tuvieron aquí su papel. Una serie notable, cuyo valor en el límite es e, aparece en la preparación de las tablas de interés compuesto. Esta serie se obtiene desarrollando $(1 + 1/n)^n$ cuando *n* tiende a infinito. El origen de esta importante expresión es interesante.

Suponga que su banco le paga el 3% de interés anual por sus depósitos. Si este interés se acumula al final de cada año, durante un período de tres años, el monto a su favor, suponiendo un capital original de $1,00, estará dado por la fórmula: $(1 + 0{,}03)^3$. Si el interés es *compuesto* semestralmente, al cabo de un período de tres años, el total de capital más interés seria: $(1 + 0{,}03/2)^{2\times3}$

Imagínese, sin embargo, que usted es lo suficientemente afortunado como para encontrar un banco filantrópico que decide pagarle el 100% de interés anual. Entonces, el monto a su favor al finalizar el primer año será $(1 + l)^1 = \$2{,}00$.

Si el interés se compone semestralmente, el monto será $(1 + 1/2)^{1\times2} = 2\ 1/4$ o sea $ 2,25. Si se capitalizara trimestralmente sería: $(1 + 1/4)^{1\times4} = \$2.43$. Parece evidente que, cuantas más veces se componga el interés, tanto más dinero tendrá usted en el banco. Con un nuevo esfuerzo de imaginación usted puede concebir la posibilidad de que el banco filantrópico decida componer el interés *continuamente*, es decir *en cada* uno de los instantes del año. ¿Cuánto dinero tendrá

usted entonces al final del año? Sin duda una fortuna. Por lo menos, eso es lo que usted sospecharía, aun teniendo en cuenta sus experiencias con bancos. Claro está que usted podría llegar a ser, no un millonario ni un billonario, sino más bien lo que podría definirse como un "infinitario". ¡Ay!, deje de lado todas las ilusiones de grandeza, porque el proceso de componer intereses continuamente en cada instante, da origen a una serie infinita que *converge* al límite *e*. La suma depositada al cabo de este año agitado, con su aparente promesa de incalculables riquezas, no sería más que $2,72. Porque si uno se toma la molestia de desarrollar $(1 + 1/n)^n$, cuando *n* llega a ser muy grande[45] los valores sucesivos así obtenidos, se aproximan al valor de *e* y cuando *n* se hace infinito, $(1 + 1/n)^n$ produce realmente la suma infinita que da *e:*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \cdots$$

Además de servir como base de los logaritmos naturales, *e* es un número útil en todas partes, en las matemáticas y en las ciencias aplicadas. Ninguna otra constante matemática, ni siquiera π, está más estrechamente vinculada a las cuestiones humanas. En economía, estadística, en la teoría de la probabilidad y en la función exponencial, *e* ha contribuido a hacer una cosa y a hacerla mejor que cualquier otro número descubierto hasta ahora. Ha representado un papel preponderante ayudando a los matemáticos a describir y pronosticar lo que para el hombre constituye el más importante de todos los fenómenos naturales, el del crecimiento.

La función exponencial: $y = e^x$ es el instrumento usado, en una u otra forma, para describir el comportamiento de las cosas que crecen. Es para esto singularmente apropiada: *es la única función de x que tiene una razón de cambio, con respecto a x, igual a la función misma*[46]. Una función, como se

[45] En realidad sólo es necesario que *n* sea igual a 1,000 (esto es. el interés se calcula tres veces por día) para dar $2.72

[46] La derivada de $y = e^x$ es igual a la función misma. Para una discusión más completa de la derivada *y* de los problemas que implican razón de crecimien-

recordará, es una tabla que da una relación entre dos cantidades variables en la que un cambio en una de ellas implica algún cambio en la otra. El costo de una cantidad de carne es una función de su peso; la velocidad de un tren, una función de la cantidad de carbón consumida; la cantidad de transpiración producida, una función de la temperatura. En cada uno de estos ejemplos, un cambio en la segunda variable: peso, cantidad consumida de carbón y temperatura, tiene correlación con un cambio en la primera variable: costo, velocidad y volumen de transpiración. El simbolismo de las matemáticas permite que las relaciones funcionales sean expresadas sencillamente y en forma concisa. De este modo: $y = x$; $y = x^2$; $y =$ sen x; $y =$ cosec x; $y = e^x$ son ejemplos de funciones.

Una función no sólo es adecuada para describir el comportamiento de un proyectil en su trayectoria, de un volumen de gas sometido a cambios de presión, de una corriente eléctrica circulando a través de un conductor, sino también otros procesos que suponen cambios, tales como el crecimiento de una población, el desarrollo de un árbol, el crecimiento de una ameba, o. como lo acabamos de ver, el crecimiento de capital e interés. Es privativo de todo proceso orgánico, que la *variación* de crecimiento sea proporcional al *estado* de crecimiento Cuanto más grande es una cosa, tanto más rápidamente crece. En condiciones ideales, cuanto más grande llega a ser la población de un país, tanto más rápidamente aumenta. La variación de la rapidez de muchas reacciones químicas es proporcional a la cantidad de sustancias reactivas que intervienen. O bien, la cantidad de calor cedida por un cuerpo caliente al medio ambiente, es proporcional a la temperatura. La proporción en la cual la cantidad total de sustancia radiactiva disminuye a cada instante, debido a las emanaciones, es proporcional a la cantidad total presente en ese instante. Todos estos fenómenos que son, o se parecen, a los procesos orgánicos, pueden ser descritos, con exactitud, por una forma de la función exponencial (siendo la más simple: $y = e^x$) por cuanto

---

to véase el capítulo sobre Cálculo.

ésta tiene la propiedad de que su razón de cambio es proporcional a la razón de cambio de su variable.

Un universo donde faltaran π y *e*. como lo ha dicho algún espíritu antropomórfico, no sería inconcebible. Difícilmente uno podría imaginarse que el Sol dejaría de salir o que las mareas cesaran por falta de π y *e*. Pero sin estos artificios matemáticos, lo que sabemos del Sol y las mareas, e incluso nuestra capacidad para describir todos los fenómenos naturales, físicos, biológicos, químicos o estadísticos, quedarían reducidos a dimensiones primitivas.

i

Alicia censuraba a Humpty Dumpty por las libertades que se tomaba con las palabras: "Cuando yo uso una palabra", replicó Humpty con tono despreciativo, ésta significa precisamente aquello que yo quise decir —ni más ni menos." "La cuestión es", dijo Alicia, "si *puedes* hacer que una palabra signifique tantas cosas diferentes". "La cuestión es", dijo Humpty, "conocer a fondo el asunto, eso es todo".

Aquellos que están preocupados (y son muchos), por la palabra "imaginario", tal como se la usa en matemáticas, deberían prestar atención a las palabras de Humpty Dumpty. Por supuesto que, a lo sumo, esto es cosa de poca importancia. Repetidas veces en las matemáticas, a palabras muy familiares se les atribuyen significados técnicos. Pero, como lo ha dicho tan perspicazmente Whitehead, esto sólo es confuso para inteligencias inferiores. Cuando una palabra está definida con precisión y significa solamente una cosa, no hay más razón para criticar su uso que para criticar el uso de un nombre propio. Nuestros nombres de pila pueden no agradarnos, o no satisfacer a nuestros amigos, pero ocasionan pocas equivocaciones. La confusión surge únicamente cuando la misma palabra tiene varias acepciones y es lo que Humpty Dumpty llama una "maleta de viaje".

La semántica, una ciencia que hoy día está de moda, se dedica al estudio del uso adecuado de las palabras. Sin em-

bargo, hay mucha mayor necesidad de la semántica en otras ramas de la ciencia que en las matemáticas. En efecto, la mayor parte de los males que aquejan hoy al mundo, provienen del hecho de que algunos de sus más volubles dirigentes son decididamente antisemánticos.

Un número imaginario representa una idea matemática precisa, que se introdujo por la fuerza en el álgebra de la misma manera que con los números negativos. Llegaremos a entender más claramente cómo entraron en uso los números imaginarios si consideramos el desarrollo de sus progenitores, los números negativos.

Los números negativos aparecieron como raíces de ecuaciones tan pronto hubo ecuaciones o. mejor dicho, tan pronto como los matemáticos se ocuparon del álgebra Toda ecuación de la forma $ax + b = 0$, en la que a y b son mayores que cero, tiene una raíz negativa

Los griegos, para quienes la geometría era un goce y el álgebra un mal necesario, descartaron los números negativos Incapaces de adaptarlos a su geometría, imposibilitados para representarlos gráficamente, los griegos no consideraron, en modo alguno, a los números negativos. Pero el álgebra los necesitaba para desarrollarse. Más sabios que los griegos, más sabios que Omar Khayyám[47], los chinos y los hindúes reconocieron los números negativos antes de la era cristiana. Recién eruditos en geometría, no tenían escrúpulos de conciencia con respecto a los números que no podían representar mediante dibujos. En las teorías contemporáneas de la física matemática (relatividad, mecánica cuántica, etc.), que, si bien son comprensibles como símbolos en el papel, desafían diagramas, cuadros o metáforas adecuadas para explicarlas en términos de la experiencia común, hay una repetición de esa indiferencia hacia el deseo de representaciones concretas para ideas abstractas.

[47] Ornar Khayyám además de ser el autor del usado "Rubáiyát" fue también un distinguido matemático, pero su visión fracasó para los números negativos.

Cardano, eminente matemático del siglo XVI, jugador y bribón de vez en cuando y a quien el álgebra le debe muchísimo, fue el primero que reconoció la verdadera importancia de las raíces de números negativos. Pero su conciencia científica lo remordió hasta tal punto que las llamó "ficticias". Rafael Bombelli, de Bologna, prosiguió la obra de Cardano donde éste la había dejado. Este último había hablado de las raíces cuadradas de números negativos, pero no llegó a comprender el concepto de imaginarios. En una obra publicada en 1572. Bombelli señaló que las cantidades imaginarias eran indispensables para la solución de muchas ecuaciones algebraicas de la forma: $x^2+a = 0$, donde a es cualquier número mayor que cero, y que no pueden ser resueltas sino con el auxilio de imaginarios. Tratando de resolver una ecuación sencilla como $x^2+1= 0$ hay dos alternativas. O la ecuación no tiene sentido, lo cual es absurdo, o x es la raíz cuadrada de –1, que también es absurdo. Pero las matemáticas se alimentan de absurdos y Bombelli salió del paso aceptando la segunda alternativa.

Más de cuatrocientos años han transcurrido desde que Bombelli hizo su elección. Filósofos, hombres de ciencia y gentes dotadas de esa cualidad mental, de tono menor, conocida como sentido común, han criticado, en un siempre creciente *decrescendo,* el concepto de imaginario. Todas estas notabilidades han muerto y la mayoría de ellos han sido relegados al olvido, mientras que los números imaginarios florecen, perversa y desenfrenadamente, por todo el campo de las matemáticas.

A veces, aun los maestros se burlaron. Leibniz pensó: "Los números imaginarios son un excelente y maravilloso refugio del Espíritu Santo, una especie de anfibio entre ser y no ser." Aun el portentoso Euler expresó que números como la raíz cuadrada de menos uno "no son ni nada, ni menos que nada, lo cual necesariamente los hace imaginarios, o imposibles". Estaba en lo cierto, pero omitió decir que los imaginarios eran útiles e imprescindibles para el desarrollo de las

matemáticas. Y así, se les asignó un lugar en el dominio de los números con todos los derechos, privilegios e inmunidades pertenecientes a ellos. Con el transcurso del tiempo fueron disipándose los temores y los reparos sobre su naturaleza, de modo que el criterio de Gauss sobre los mismos es el que prevalece en la actualidad:

Nuestra aritmética general, que hasta aquí supera en extensión a la geometría de los antiguos, constituye, por completo, la creación de los tiempos modernos. Comenzando en su origen con la noción de los números enteros absolutos, ha ensanchado gradualmente su dominio. A los números enteros se han agregado las fracciones, a las cantidades racionales, las irracionales, a las positivas, las negativas, y a las reales, las imaginarias. Este progreso, sin embargo, siempre se ha hecho, al principio, con pasos vacilantes y tímidos. Los primeros algebristas llamaron raíces falsas a las raíces negativas de las ecuaciones, y éste es, en realidad, el caso cuando el problema al cual se refieren ha sido enunciado de tal manera que el carácter de la cantidad buscada no admite lo contrario Pero así como en la aritmética general nadie vacilaría en aceptar las fracciones, aunque hay tantas cosas contables para las cuales una fracción no tiene sentido, del mismo modo no desconoceríamos a los números negativos los derechos acordados a los números positivos por la sola razón de que hay innumerables cosas que no los admiten. La realidad de los números negativos está suficientemente justificada, ya que en otros innumerables casos encuentran una adecuada interpretación Hace tiempo que ya ha sido aceptado, pero las cantidades imaginarias, antiguamente y a veces ahora, impropiamente llamadas imposibles, como opuestas a las cantidades reales —son, todavía, más bien toleradas que completamente naturalizadas; aparecen más como un juego inútil sobre símbolos, a los cuales les niegan, sin vacilar, un sustrato concebible, aun aquellos que no despreciarían la rica contribución que este

juego con símbolos ha aportado al tesoro de las relaciones de las cantidades reales[48].

Los números imaginarios, como la geometría de cuatro dimensiones, surgieron de la extensión lógica de ciertos procesos. El proceso de extraer raíces se denomina evolución. Es un nombre a propósito, porque los números imaginarios evolucionaron, literalmente, por la extensión del proceso de extraer raíces. Si $\sqrt{4}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ tenían sentido, ¿por qué no habrían de tenerlo $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{-11}$? Si $x^2 - 1 = 0$ tenía una solución, ¿por qué no iba a tenerla $x^2 + 1 = 0$? El reconocimiento de los imaginarios era como el reconocimiento de la Rusia Soviética por los Estados Unidos —la existencia era innegable, todo lo que se necesitaba era una sanción formal y su aprobación.

El imaginario más conocido es $\sqrt{-1}$ Euler lo representó con el símbolo "*i*" que se usa todavía[49]. Es inútil ocuparse de la pregunta: "¿Qué número al ser multiplicado por sí mismo, es igual a –1?" Al igual que todos los otros números, *i* es un símbolo que representa una idea abstracta, pero muy precisa. Obedece a todas las reglas de la aritmética, a las que se agrega el convenio de que: $i \times i = -1$. Su obediencia a estas reglas y sus múltiples usos y aplicaciones justifican su existencia.

Las leyes formales de operación para *i* son fáciles; ya que la regla de los signos estipula que:

$$\left.\begin{array}{l} (+1) \times (+1) = +1 \\ (+1) \times (-1) = -1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (-1) \times (+1) = -1 \\ (-1) \times (-1) = +1 \end{array}\right.$$

Por consiguiente:

---

[48] Traducido en Dantzig. *Number, the Languaje of Science* (New York. Macmillan). 1933» p 190.

[49] En una oportunidad se sugirió que los símbolos adecuados para las constantes *e* e *i* deberían ser para *e* y para *i* a fin de evitar confusiones Pero los impresores se resistieron a hacer los nuevos tipos y los viejos símbolos prevalecieron. Más a menudo de lo que pudiera creerse, consideraciones de esa naturaleza determinaron el carácter de la notación matemática

$$i \times (+1) = \sqrt{-1}$$
$$i \times (-1) = -\sqrt{-1}$$

$$-i \times (-1) = +i$$
$$-i \times (-1) = \sqrt{-1}$$

$$i \times i = i^2$$
$$i \times i = -1$$

$$i \times i \times i = i^3$$
$$i \times i \times i = (\sqrt{-1})\,(\sqrt{-1})^2$$
$$i \times i \times i = (\sqrt{-1}) \times (-1)$$
$$i \times i \times i = -\sqrt{-1}$$

$$i \times i \times i \times i = i^4$$
$$i \times i \times i \times i = (\sqrt{-1})^2\,(\sqrt{-1})^2$$
$$i \times i \times i \times i = (-1) \times (-1)$$
$$i \times i \times i \times i = +1$$

$$i \times i \times i \times i \times i = i^5$$
$$i \times i \times i \times i \times i = (\sqrt{-1})^2\,(\sqrt{-1})^2\,(\sqrt{-1})$$
$$i \times i \times i \times i \times i = (-1) \times (-1) \times \sqrt{-1}$$
$$i \times i \times i \times i \times i = (+1) \times \sqrt{-1}$$
$$i \times i \times i \times i \times i = \sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

De lo cual podemos construir una tabla muy útil.

$i^1 = \sqrt{-1} = i$ — $i^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

$i^3 = -1 \times \sqrt{-1} = -i$ — $i^4 = (\sqrt{-1})^2\,(\sqrt{-1})^2 = +1$

$i^5 = +1 \times \sqrt{-1} = i$ — $i^6 = +1 \times (\sqrt{-1})^2 = -1$

$i^7 = -1 \times \sqrt{-1} = -i$ — $i^8 = -1 \times (\sqrt{-1})^2 = +1$

↓ — ↓

Esta tabla nos indica que las potencias *impares* de *i* son iguales a $-i$, o $+i$, y que las potencias *pares* de *i* son iguales a -1 o $+1$.

La extensión del uso de los imaginarios ha conducido a los números complejos de la forma: $a + ib$, donde a y b son números *reales* (para distinguirlos de los imaginarios). Así: $3+4i$; $1-7i$; $2+3i$, son ejemplos de números complejos.

El enormemente fecundo campo de la teoría de funciones es consecuencia directa del desarrollo de los números complejos. Si bien éste es un tema demasiado técnico y especializado, tendremos ocasión de mencionar de nuevo los números complejos cuando expliquemos la representación geométrica de los imagínanos. Con ese fin, debemos ocuparnos por un momento de esa idea matemática que, como dijo Boltzmann en cierta ocasión, parece casi más inteligente que el hombre que la inventó: la ciencia de la Geometría Analítica.

La música descriptiva se distingue de la música absoluta, la cual debe su coherencia a la estructura, en que el propósito de la primera es narrar un determinado argumento. En cierto sentido, la geometría analítica puede distinguirse de la geometría de los griegos, del mismo modo en que la música descriptiva se distingue de la música absoluta. La geometría, práctica en sus orígenes, fue cultivada y desarrollada por amor a ella misma, como disciplina lógica y como estudio de las formas. La geometría era una manifestación del esfuerzo por lograr un ideal. Los cuerpos y las formas que eran estudiados ansiosamente. Pero los griegos cultivaron lo práctico solamente hasta donde era compatible con lo hermoso; más allá de ello, sus matemáticas se vieron trabadas por su estética.

Se dejó a Descartes la tarea de escribir la música descriptiva de las matemáticas, de inventar una geometría que relatara una narración. Cuando se dice que toda ecuación algebraica tiene un retrato, estamos describiendo la relación existente entre la geometría analítica y el álgebra. Y así como la música descriptiva es tan importante y significativa en sí misma como el cuento que representa, así la geometría analítica tiene su propia dignidad e importancia —es una disciplina matemática autónoma.

Los padres jesuitas eran, a menudo, muy sensatos. En su escuela situada en La Fléche, permitieron al joven René Descartes, a causa de su delicada salud, quedarse en la cama todas las mañanas hasta mediodía. No es difícil imaginarse lo que McGuffey[50] habría profetizado sobre el futuro de semejante niño. Pero Descartes no resultó un perdido. En efecto, su delicioso hábito de permanecer en cama hasta mediodía, dio, por lo menos, un fruto notable La geometría analítica vino a él una mañana mientras estaba acostado plácidamente.

Es portentosa esta idea de una geometría con coordenadas y, sin embargo, tan fácil de comprender. Considérense dos rectas (ejes) en un plano: *xx*', *yy*' que se cortan formando ángulos rectos en un punto *R*.

Cualquier punto en todo el plano puede entonces determinarse, de una manera única, por su distancia perpendicular a las rectas *xx'* y *yy'* El punto *P* por ejemplo, por las distancias *m* y *m'*. De este modo, un *par* de números que representan a los valores de las distancias con respecto a *xx'* y *yy'* determinan cada punto en el plano y, recíprocamente, cada punto del plano determina un par de números Estos números se denominan las *coordenadas* del punto.

[50] William Holmes McGuffey (1800-1873), educador norteamericano *(N. del T)*

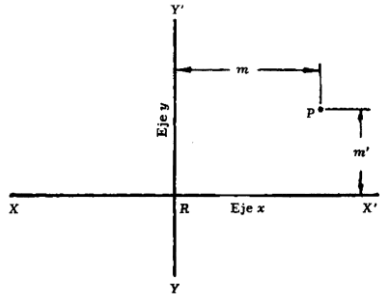


Fig. 20. El punto P tiene las coordenadas *(m, m'*).

Todas las distancias sobre *xx*' medidas a la derecha de *R* son consideradas positivas y a la izquierda de *R*, negativas. Análogamente, todas las distancias medidas sobre *yy*' por encima de *R* son positivas y por debajo, negativas. El punto de intersección, el *origen*, queda determinado por las coordenadas (0, 0). El convenio para la escritura de las coordenadas consiste en poner primero la distancia *desde* el eje *yy*' (es decir, la distancia *a lo largo* del eje *xx*') y en segundo lugar, la distancia *desde* el eje *xx*' a *lo largo* del eje *yy*'; por ejemplo: (0, 0), (4, 3), (–1, 5), (6, 0), (0, 6), (–5, –6), (3, –3), (–8, 0), (0, –8) son las coordenadas de los puntos indicados en la figura 21.

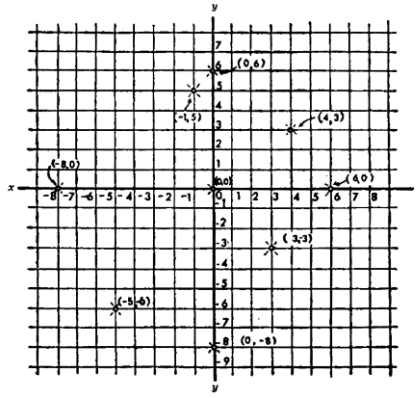


Fig. 21. Los ejes de coordenadas en el plano real.

Relacionando esta noción con la de una función no es difícil de ver cómo puede representarse gráficamente una ecuación en el plano de la geometría analítica. Cuando *x* e *y* están relacionadas funcionalmente, a cada valor de *x* le corresponde un valor de *y*, y estos dos valores determinan la posición de un punto en el plano. La totalidad de dichos pares de números, es decir, de todos los valores de y que corresponden a todos los valores de *x*, cuando se unen mediante una curva continua, como la figura 22 *(a, b, c)*, determinan el retrato geométrico de una ecuación.

Empleando la geometría analítica, ¿cómo representamos un número imaginario tal como $\sqrt{-1}$? Un teorema de geometría elemental, referente a la media geométrica, nos da la clave (véase la fig. 23).

En el triángulo rectángulo *ABC*, la perpendicular *AD* divide a *BC* en dos partes *BD*, *DC*. La longitud de la perpendicular *AD* es igual a $\sqrt{(BD \times DC)}$ y se denomina la *media geométrica* entre *BD* y *DC* (fig. 23).

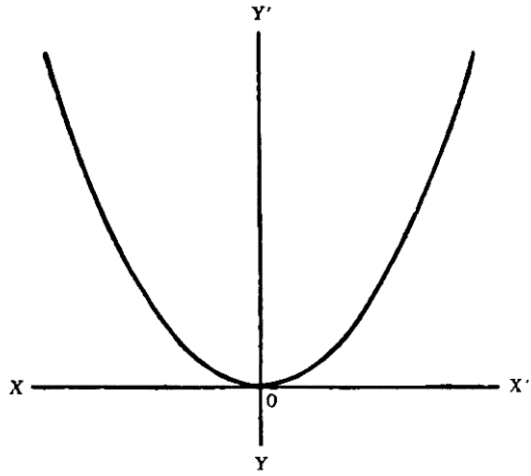


Fig. 22(a). Representación gráfica de la ecuación, $y = x^2$.

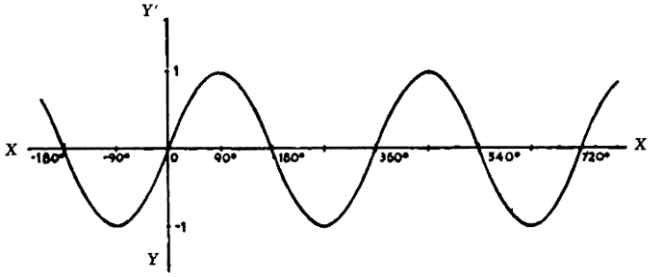


Fig. 22(b). Representación gráfica de la ecuación y = sen x. Ésta es la famosa curva ondulada que se emplea para representar muchos fenómenos periódicos y regulares, por ejemplo, la corriente eléctrica, el movimiento de un péndulo, la radio transmisión, las ondas sonoras y luminosas, etc. (Para el significado de sen x, véase la nota 142 en el capítulo IX sobre el cálculo infinitesimal.)

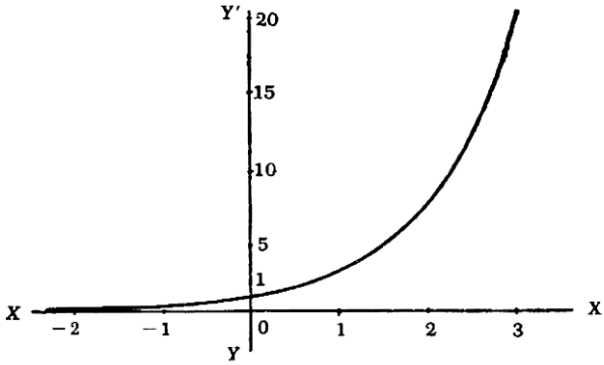


Fig. 22(c). Representación gráfica de la ecuación: $y = e^x$ Esta curva muestra la propiedad común a todos los fenómenos de crecimiento: la razón de crecimiento es proporcional al estado de crecimiento.

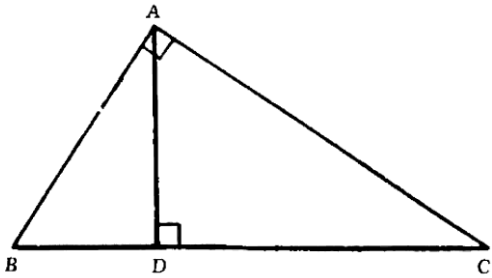


Fig. 23. Longitud $AD = \sqrt{(BD \times DC)}$ = media geométrica de *BD* y *DC*.

Un agrimensor noruego, Wessel, y un tenedor de libros parisiense, Argand, a fines del siglo XVIII y comienzos del XIX, descubrieron, independientemente, que los números imaginarios podían representarse aplicando este teorema. En la figura 24 la distancia *S*, desde el origen *R* hasta +1, es la media geométrica del triángulo de lados *L* y *L'*, y la base formada por aquella parte del eje xx' que va de –1 a +1.

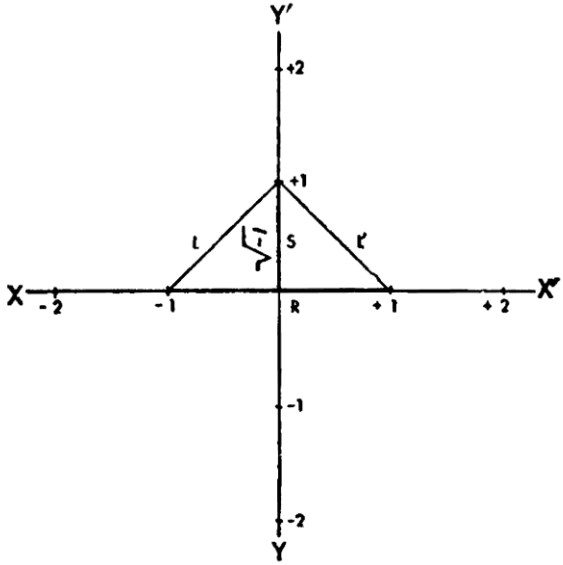


Fig. 24. Interpretación geométrica de *i*.

Luego,

$$S = \sqrt{(-1) \times (+1)} = 1 \times \sqrt{-1} = i$$

Así pues, tenemos ya una representación geométrica de un número imaginario

Extendiendo esta idea, Gauss formó todo el plano complejo. En éste, cada punto representado por un número complejo de la forma $x + iy$ corresponde al punto del plano determinado por las coordenadas x e y. En otras palabras, un número complejo puede ser considerado como un par de números reales, con el agregado del número i. El uso de i aparece solamente al efectuar las operaciones de multiplicación y división. Imagínese una recta que una el punto $(a + ib)$ con el origen R. Entonces la operación de multiplicar por -1 es equivalente a hacer girar esa línea en 180º, alrededor del origen y a un cambio de posición del punto desde $(+a + ib)$ hasta $(–a – ib)$ El efecto de multiplicar un número por i es tal que cuando se realiza dos veces, se obtiene i^2, lo cual es equivalente a la multiplicación por –1.

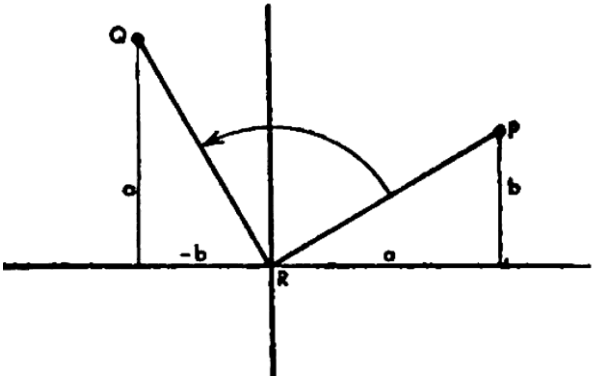


Fig. 25. La multiplicación por i es una rotación de 90°.

Sea $P = (a + ib)$.
Entonces, $P \times i = (a + ib) \times i = (a \times i) + (b \times i \times i) = ia + b \times –1 = -b + ia = Q$.

Por lo tanto, la multiplicación por *i* es una rotación de sólo 90º.

Los números complejos pueden ser sumados, restados, multiplicados y divididos como si fuesen números reales Las reglas formales de estas operaciones (la más interesante de las cuales es la sustitución de –1 por i^2) se indican en los ejemplos que van a continuación:

(1) $x + iy = x' + iy'$ *si y solamente si* $x = x'$ *e* $y = y'$

(2) $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x) + i(y + y')$

(3) $(x + iy) - (x' + iy') = (x - x) + i(y - y')$

(4) $(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

(5) $$\frac{(x+iy)}{(x'+iy')} = \left[\frac{xx'+yy'}{(x')^2+(y')^2}\right] + i\left[\frac{yx'-xy'}{(x')^2+(y')^2}\right]$$

La figura 26 muestra los mismos puntos que en el plano dado en la figura 21 excepto que, para las coordenadas *x* e *y* de cada punto, hemos sustituido el número complejo correspondiente *x* + *iy*.

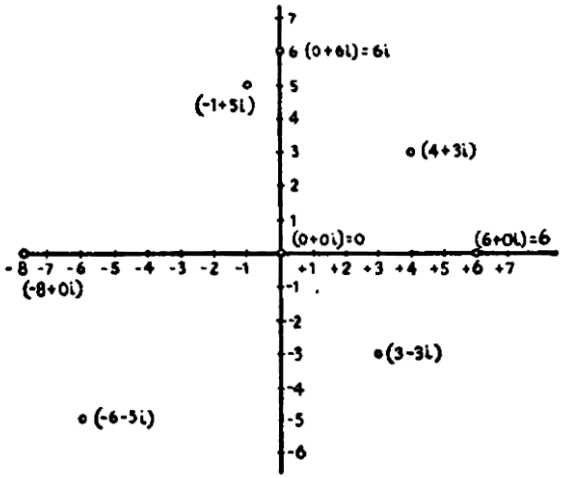


Fig. 26. El plano complejo.

En virtud de las propiedades especiales de *i*, los números complejos pueden emplearse para representar, a un mismo tiempo, magnitud y dirección. Mediante ellos pueden representarse convenientemente algunas de las nociones más importantes de la física, tales como velocidad, fuerza, aceleración, etc.

Ya se ha dicho bastante para indicar la naturaleza de *i*, su finalidad e importancia en las matemáticas, su desafío y su victoria final sobre los principios arraigados del sentido común. Sin arredrarse ante su paradójica apariencia, los matemáticos le usaron tal como lo habían hecho con π y *e*. El resultado fue el hacer posible la construcción de casi todo el edificio de la ciencia física moderna[51].

Falta una cosa. Hay una famosa fórmula —quizá la más breve y famosa de todas las fórmulas— desarrollada por Euler en base a un descubrimiento del matemático francés. De Moivre: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Elegante, concisa y llena de significado, solamente podemos reproducirla sin detenemos a investigar sus complicaciones. Llama la atención tanto al místico como al hombre de ciencia, al filósofo como al matemático. Para cada uno de ellos tiene su propio significado. Aunque era conocida hacía más de un siglo, la fórmula de De Moivre llegó como una revelación a Benjamín Peirce, uno de los matemáticos más sobresalientes de la Universidad de Harvard en el siglo XIX. Habiéndola descubierto un día, se dirigió a sus alumnos e hizo una observación que suple en calidad dramática y reconocimiento lo que pudiera faltarle en erudición y pedantería: "Caballeros", dijo, "esto es sin duda cierto, es absolutamente paradójico, no podemos comprenderlo, y no

[51] Demos este bálsamo al lector que nos ha acompañado tan valientemente a través de las páginas sobre geometría analítica y números complejos. El promedio de duración de un curso escolar de geometría analítica (sin incluir números complejos) es de seis meses. Es. por lo tanto, pretender demasiado que pueda aprenderse en casi cinco páginas Por otra parte, si se ha fijado la idea básica de que todo número, toda ecuación de álgebra, pueden representarse gráficamente los detalles horripilantes pueden dejarse a aventureros más intrépidos.

sabemos lo que significa, pero lo hemos demostrado y, por lo tanto, sabemos que debe ser verdad".

Cuando haya tanta humildad y tanta visión en todas partes, la sociedad será gobernada por la ciencia y no por los sabihondos.

APÉNDICE

Nacimiento de una curva

1. Consideremos la ecuación $y = x^2$. Tomemos unos pocos valores de prueba para x y hallemos los correspondientes valores de y, disponiendo los resultados en una tabla:

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Es decir: $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, etc. Representando estos puntos en el plano cartesiano, obtenemos la figura A.

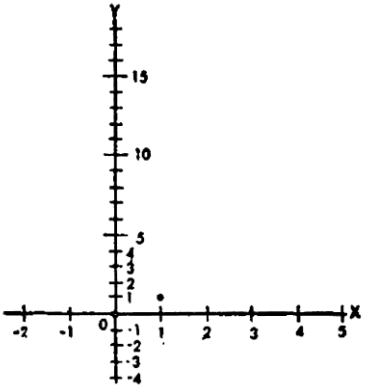


Fig. A

2. Ahora, ¿qué hacemos con respecto a los valores negativos de *x*? Vemos por ejemplo $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$. Esto es evidentemente cierto para todos los valores de *x*. de manera que a cada punto representado en la figura A. corresponde otro punto que es su imagen especular, siendo el espejo el eje *OY*. Agregando éstos sale la figura B.

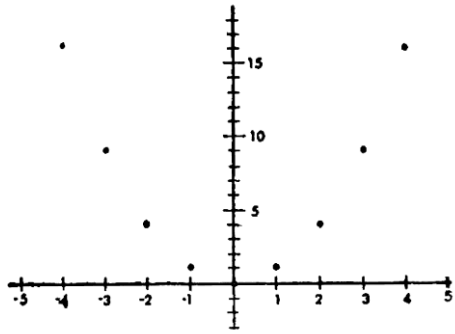


Fig. B

3. La disposición de los puntos sugiere que dibujemos una curva lisa que pase por ellos (fig. C).

Pero, ¿contiene esta curva a otros puntos que aparecen en nuestra tabla funcional? Probémoslo, tabulando algunos valores fraccionarios de *x*.

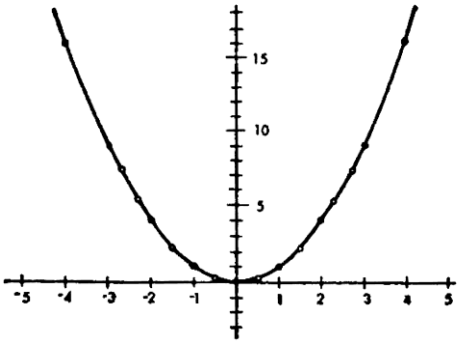


Fig. C

x	*y*
1/2	1/4
1 1/2	2 1/4
2,3	5,29
2,7	7,29

Si graficamos estos nuevos puntos podrá verse que todos ellos pertenecen a la curva (fig. D). En efecto, si continuásemos así, encontraríamos que *todo* punto que pueda aparecer en la tabla pertenecerá a la curva. La totalidad de dichos puntos formará la curva conocida con el nombre de parábola.

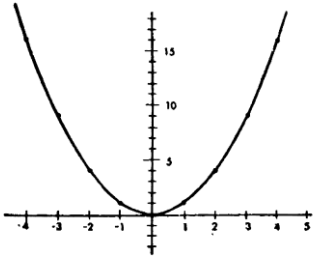
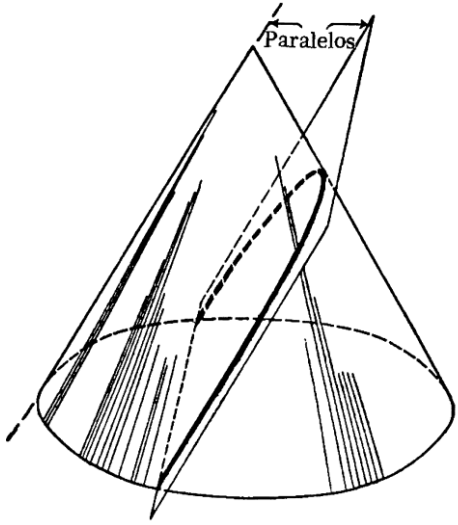


Fig. D



La parábola está formada por la sección de un cono cortado por un plano paralelo a la generatriz opuesta.

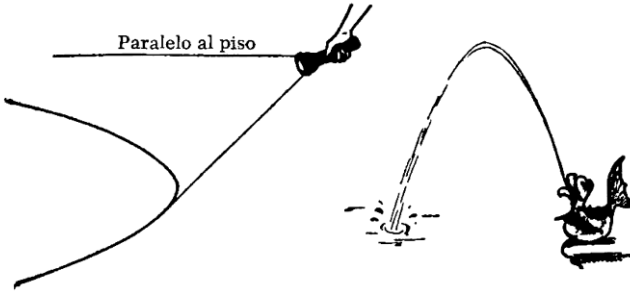


Fig. E. Se puede formar una parábola con una linterna sosteniéndola de modo que el límite superior del haz luminoso sea paralelo al piso. Un chorro de agua forma una parábola lo mismo que la trayectoria de un proyectil. Pero la curva formada por un trozo de cuerda, sostenida por sus extremos y que cuelga libremente, *no* es una parábola sino una *catenaria*.

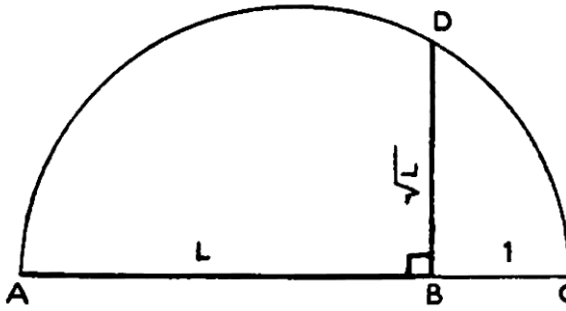


Fig. 27. Sea *AB* la longitud dada. Extiéndasela hasta *C* de manera que *BC* = 1. Trácese un semicírculo cuyo diámetro sea *AC*. Levántese una perpendicular por *B*. la cual cortará al semicírculo en *O*. El segmento *BD* es la raíz cuadrada de *L* requerida.

IV. OTRAS GEOMETRÍAS: EL PLANO Y LA FANTASÍA

Dicen que el hábito es lo segunda naturaleza. ¿Quién sabe si la naturaleza es sólo el primer hábito?
PASCAL

Entre nuestras más caras convicciones, ningunas tan preciosas como nuestras creencias acerca del espacio y del tiempo. Ningunas, sin embargo, más difíciles de explicar. El pez parlante del cuento de los hermanos Grimm se habría visto en grandes dificultades para explicar cómo se sentía al estar continuamente mojado, no habiendo experimentado nunca el placer de estar seco. Nosotros tenemos dificultades análogas al hablar del espacio, por no saber qué es ni cómo sería no estar en él. El espacio y el tiempo son "demasiado nuestros" para desprendemos de ellos y describirlos objetivamente.

"Porque, ¿qué es el tiempo?", preguntaba san Agustín. "¿Quién puede explicarlo fácil y brevemente? ¿Quién, aun con el pensamiento, puede concebirlo, aun pronunciando una palabra referente a él? Pues, ¿a qué cosa, en el habla, nos referimos más familiarmente y con conocimiento de causa que al tiempo? Y por cierto que lo entendemos al hablar de él; lo comprendemos también cuando oímos que otro habla de él. Entonces, ¿qué es el tiempo? Si nadie me lo pregunta, lo sé. Si deseo explicarlo a quien me lo pregunta, no lo sé" [52].

Y esto también podría decirse del espacio Aunque el espacio no puede ser definido, hay poca dificultad para medir distancias y superficies, para desplazarse, para hacer cartografías de grandes extensiones, o en ver a través de millones de años luz. Por todas partes está la abrumadora evidencia de que el espacio es nuestro medio natural, que no nos presenta problemas insuperables.

[52] San Agustín. *Confesiones.*

Pero este libro no pretende ser un tratado filosófico, ni tampoco un *Manual de Introducción a la Teoría del Espacio,* escrito en alemán en 14 volúmenes. Nuestro propósito consiste en explicar de la manera más sencilla y general, no el espacio físico que perciben nuestros sentidos, sino el espacio del matemático. A tal fin, todas las nociones preconcebidas deben desecharse y aprender de nuevo el alfabeto.

En este capítulo nos proponemos discutir dos clases de geometrías: las de cuatro dimensiones y las no-euclidianas. Ninguno de estos temas va más allá de la comprensión del no matemático que esté dispuesto a realizar un razonamiento correcto. Es verdad que ambos temas han sido descritos, como la teoría de la relatividad (con la que en cierto modo se relacionan) en forma de un arrogante espantajo. Los sumos sacerdotes de toda profesión idean complicados rituales y lenguaje oscuro, tanto para ocultar su propia inepcia como para infundir terror a los no iniciados. Pero la corrupción del clero no debe desanimarnos. Las ideas básicas sobre las que se fundan las geometrías de cuatro dimensiones y no euclidianas son sencillas y esto es lo que nos proponemos demostrar.

Euclides, al escribir los *Elementos*, no tropezó con grandes obstáculos. Partiendo de ciertas ideas fundamentales (presumiblemente entendidas por todos) y que expresó como postulados y axiomas, creó su geometría sobre ellas, utilizándolas como cimientos Este método, ideal para desarrollar un sistema lógico, jamás ha sido mejorado, aunque a veces ha sido descuidado u olvidado, con tristes consecuencias.

Si bien los *Elementos* de Euclides constituyen una importante realización intelectual, tienen el defecto de no hacer una importante distinción entre dos tipos de matemáticas —*puras* y *aplicadas*—, distinción que sólo ha salido a la luz en los modernos desarrollos teóricos en las matemáticas, la lógica y la física.

Una geometría que trate del espacio de nuestra experiencia, es matemática *aplicada.* Si nada dice de ese espacio, si,

en otras palabras, es un sistema compuesto de nociones abstractas, elementos y clases, con reglas de combinación que obedecen a las leyes de la lógica formal, es matemática *pura*. Sus proposiciones son de la forma: "Si *A* es cierto, entonces *B* es cierto", haciendo caso omiso de lo que *A* y *B* puedan ser[53].

---

[53] Un ejemplo de matemáticas puras tomado de Morris Raphael Cohen y Ernest Nagel, *An Introduction to Logic and Scientific Method* (New York Harcourt Brace. 1936) Páginas 119-126.

Consideremos las siguientes proposiciones que son los axiomas para una ciase especial de geometría:

Axioma *1*. Si *A* y *B* son dos puntos distintos entre sí, en un plano hay, entonces, por lo menos, una recta que contiene a *A* y a *B*.

Axioma 2. Si A y B son dos puntos distintos entre sí. en un plano entonces no hay más que una recta que contiene a *A* y *B*.

Axioma *3*. Dos rectas cualesquiera del plano tienen por lo menos, en común, un punto de éste.

Axioma 4. Hay por lo menos una recta en el plano.

Axioma 5. Toda recta contiene, por lo menos, tres puntos del plano.

Axioma 6. No todos los puntos de un plano pertenecen a la misma recta.

Axioma 7. Ninguna recta contiene más de tres puntos del plano.

Estos axiomas parecen referirse evidentemente a puntos y rectas de un plano. En efecto, si omitimos el séptimo, constituyen las suposiciones hechas por Veblen y Young para una "geometría proyectiva" sobre un plano, en su tratado clásico sobre esa materia. No es necesario que el lector sepa algo sobre geometría proyectiva, para comprender la discusión subsiguiente. Pero, ¿qué son los puntos, las rectas y los planos? El lector puede pensar que "sabe" lo que son. Puede dibujar puntos y rectas con lápiz y regla y quizá también convencerse de que los axiomas expresan realmente las propiedades y relaciones de estos entes geométricos. Esto es sumamente dudoso, ya que las propiedades de las marcas hechas sobre el papel pueden diferir notablemente de las que se han postulado Pero, de cualquier modo, la cuestión de si estas marcas reales concuerdan o no. es de la competencia de las matemáticas *aplicadas* y no de las *puras* Debe notarse que los axiomas mismos, no indican qué son "realmente" los puntos, las rectas, etc. Con el objeto de descubrir las deducciones de estos axiomas, no es indispensable saber qué debemos comprender por puntos, rectas y planos Estos axiomas implican vanos teoremas, no en virtud de la representación visual que el lector pueda asignarles, sino en virtud de su forma lógica Los puntos, las rectas y los planos pueden ser entidades cualesquiera, indeterminadas por completo, salvo por las relaciones que expresan los axiomas.

Eliminemos, por lo tanto, toda referencia explícita a puntos, rectas y planos y con ello suprimiremos toda exhortación a la intuición del espacio al deducir algunos teoremas de los axiomas Supongamos, entonces, que en lugar de la palabra "plano", empleamos la letra *S* y en vez de la palabra "punto" usamos la frase "*elemento de S"* Evidentemente si se considera al plano (*S*) como una colección de puntos (elementos de *S*), una recta puede ser considerada como una ciase de puntos (elementos) que es una subclase de los puntos del plano (*S*) Sustituiremos, por lo tanto, la palabra "recta" por la expresión "*dase L*" Nuestro con junto original de axiomas se leerá como sigue.

Axioma *1'.* Si *A* y *B* son elementos distintos de *S*, hay por lo menos, una *clase L* que contiene a *A* y a *B.*

Axioma 2'. Si *A* y *B* son dos elementos distintos de *S* no hay más que una *clase L* que contiene a *A* y a *B.*

Axioma *3'.* Dos *clases L*, cualesquiera, tienen por lo menos, en común, un elemento de *S*

Axioma *4'.* Hay por lo menos una *clase L* en *S*.

Axioma *5'*. Toda *clase L* contiene, por lo menos, tres elementos de *S*.

Axioma *6'.* Todos los elementos de *S* no pertenecen a la misma *clase L.*

Axioma *7'*. Ninguna *clase L* contiene más de tres elementos de *S*.

En esta serie de suposiciones no se hace referencia explícita a ninguna entidad específica Las únicas nociones requeridas para establecerlas, son de un carácter completamente general Las ideas de "clase". "subclase", "elementos de una clase", la relación de 'pertenecientes a una clase" y la relación recíproca de una "clase que contiene a elementos", la noción de "número", son partes del equipo fundamental de la lógica Por lo tanto, si logramos descubrir las deducciones de estos axiomas, no puede ser a causa de las propiedades del espacio como tal (En realidad, ninguno de estos axiomas puede ser considerado como proposición; ninguno de ellos es. en sí mismo, verdadero o falso, puesto que los símbolos S. *clase L A.* B. etc., son variables Cada una de las variables denota alguna clase de entidades posibles, la única restricción que se les hace es que deben "satisfacer" a. o concordar con las relaciones formales expresadas en los axiomas. Pero hasta que a los símbolos se les asignen valores específicos, los axiomas son funciones proposicionales, pero no son proposiciones)

Nuestras "suposiciones", por lo tanto, consisten en relaciones consideradas para ser válidas entre términos indefinidos. Por el lector notará que aunque ningún término es definido *explícitamente*, se ha hecho de ellos una definición *implícita*. Pueden denotar cualquier cosa con tal que lo que ellos denoten concuerde con las relaciones que expresan Este procedimiento caracteriza la técnica matemática moderna. En Euclides, por ejemplo, se dan definiciones *explícitas* de puntos, rectas, ángulos, etc. En un tratado moderno de geometría, estos elementos son definidos, *implícitamente* mediante los axiomas.

Como veremos este último procedimiento permite dar una variedad de interpretaciones a los elementos indefinidos y exhibir así una identidad de estructuras en diferentes aspectos concretos...

IDENTIDAD ESTRUCTURAL O ISOMORFISMO

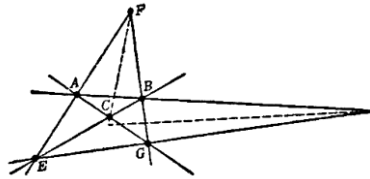
Tenemos que demostrar ahora que un conjunto abstracto, como el tratado precedentemente, puede tener más de una representación concreta y que estas diferentes representaciones, aunque sumamente distintas en contenido material, serán idénticas en estructura lógica.

Supongamos que hay una firma bancaria constituida por siete socios A fin de asegurarse una información experta en lo referente a los diversos valores con que operan, deciden formar siete comisiones, cada una de las cuales estudiará una actividad especial. Convienen, además, que cada socio actuará como presidente de una comisión y que cada uno de ellos participará en tres y solamente en tres comisiones. A continuación damos una lista de las comisiones y sus miembros, el primero de los cuales actúa como presidente:

Ferrocarriles nacionales	Adams	Brown	Smith
Títulos de la deuda municipal	Brown	Murphy	Ellis
Títulos de la deuda federal	Murphy	Smith	Jones
Títulos de inversiones en Sudamérica	Smith	Ellis	Gordon
Industria Nacional del Acero	Ellis	Jones	Adams
Títulos de inversiones en Europa	Jones	Gordon	Brown
Empresas de servicios públicos	Gordon	Adams	Murphy

Un examen de esta lista muestra que "satisface" los siete axiomas, si se considera a la firma bancaria como la clase S. a sus socios como los elementos y a las varias comisiones como las *clases L*...

Una interpretación más, sirve de ejemplo para las mismas siete relaciones formales.



En el diagrama hay siete puntos pertenecientes, de tres en tres, a siete rectas, una de las cuales está "doblada" Si cada punto representa un elemento de S y cada conjunto de tres puntos perteneciente a una recta, una *clase L.* se satisfacen todas las siete suposiciones Así, por ejemplo, la relación de tres términos entre Adams. Brown y Smith, en virtud de la cual pertenecen a la misma comisión, se cumple para los puntos A. *B. D* que caen sobre la misma recta Y. en general, lo que puede deducirse para A de las suposiciones es válido para Adams, lo que puede deducirse para *B* es válido para Brown etc.

Si fuese aplicable al mundo físico un sistema de matemáticas puras, el provecho que se obtuviera podría ser considerado, ya como simple casualidad, ya como prueba más amplia de la profunda conexión existente entre las formas de la naturaleza y las de las matemáticas. Sin embargo, en cualquiera de los dos casos debe tenerse presente este hecho esencial, a saber, que la fecundidad de un sistema lógico ni aumenta ni disminuye su validez.

Como matemática aplicada, la geometría de Euclides es una buena aproximación dentro de un campo restringido. Suficientemente buena para dibujar un plano de Madrid; deja de serlo para un mapa de España o de Europa, o para la medida de las distancias atómicas o estelares. Como sistema de matemáticas puras, sus proposiciones son verdaderas en el sentido más general. Es decir, tienen validez únicamente como proposiciones lógicas, si han sido deducidas correctamente de los axiomas. Son, por lo tanto, posibles, otras geometrías con postulados diferentes —en realidad tantas como al matemático se le ocurra idear Todo lo que se necesita es reunir ciertas ideas fundamentales (clases, elementos, reglas de combinación), declarar los conceptos indefinibles, garantizar que los axiomas no se contradicen, y se habrán fundado los cimientos para un nuevo edificio: una nueva geometría. Al matemático puro no le importa un ápice si esta nueva geometría será provechosa, si resultará ser tan útil para el agrimensor o el navegante como la geometría euclidiana, o si sus ideas fundamentales están a la altura de cualquier otra norma de verdad que no sea la compatibilidad consigo misma. El matemático es el sastre de la clase media de la ciencia. Confecciona los trajes, y a quienes les queden bien, que los usen. Dicho en otras palabras: el matemático hace las reglas del juego y quien lo desee puede jugar mientras las observe. No tiene derecho a quejarse luego alegando que el juego no le haya dejado utilidades.

Si deseamos hacer el máximo cumplido a un sistema matemático, expresar que participa de la misma generalidad y de

la misma validez que la lógica, podemos llamarlo "juego". Una geometría de cuatro dimensiones es un juego, como también lo es la Geometría de Euclides. Poner reparos a la geometría de cuatro dimensiones basándose en que solamente hay tres dimensiones, es absurdo. El ajedrez puede ser jugado tanto por quienes creen en camaradas o dictadores, como quienes se adhieren a la gloria, languideciente, de reyes y reinas. ¿Qué sentido tiene, pues, oponer reparos al ajedrez fundándose en que reyes y reinas pertenecen a épocas pasadas y que, sea como fuere, nunca se comportaron como piezas de ajedrez —no, ni siquiera los obispos[54]? ¿Qué valor tiene entonces el argumento de que el ajedrez es un juego ilógico, porque es imposible concebir que un ciudadano cualquiera pueda ser coronado reina por el solo hecho de avanzar cinco pasos?

Tal vez éstos son ejemplos ridículos, pero no lo son más que las exigencias del pusilánime que dice que las tres dimensiones hacen el espacio y que el espacio hace las tres dimensiones, "eso es todo lo que vosotros sabéis sobre la Tierra y todo cuanto necesitáis saber". Porque no hay demostración, de carácter científico, de que el espacio sea de tres dimensiones o, para el caso, de cuatro, cinco, seis o de *n* dimensiones. La geometría considerada como matemática *pura* no puede demostrar que el espacio sea de tres dimensiones porque a la matemática *pura* sólo le interesa su coherencia lógica interna, y no su compatibilidad con el espacio o cualquier otra cosa. Ni tampoco es esta cuestión de la incumbencia de las matemáticas aplicadas, que generalmente no investigan la naturaleza del espacio, sino que suponen su existencia. Todo cuanto hemos aprendido de las matemáticas aplicadas es: resulta conveniente, pero no obligatorio, considerar al espacio de nuestra percepción sensorial como de tres dimensiones.

Al reparo de que una cuarta dimensión está más allá de la imaginación, podemos responder que lo que hoy es sentido

[54] Juego de palabras con el doble significado de *bishop*, que quiere decir *alfil* u *obispo*, indistintamente. *(N del T).*

común, ayer era razonamiento abstruso —más aún, especulación descabellada. Para que el hombre primitivo imaginara la rueda o un vidrio de ventana, se hubieran requerido mayores esfuerzos de imaginación que para nosotros concebir una cuarta dimensión.

Alguien podría todavía aducir: "Usted me dice que la geometría de cuatro dimensiones es un juego. Quiero creerlo. Pero parece ser un juego al que no le interesa nada real, sino algo que jamás he experimentado." Le responderíamos a la manera socrática, con otra pregunta: "Si una geometría de cuatro dimensiones no trata de nada real, entonces ¿qué estudia la geometría plana de Euclides? ¿Algo más real? ¡Por cierto que no! No describe el espacio accesible a nuestros sentidos, que explicamos en términos de vista y tacto. Habla de puntos que no tienen dimensión, de línea que no tiene anchura y de planos que carecen de espesor —abstracciones e idealizaciones todas ellas que en nada se parecen a cuanto hemos experimentado o encontrado.

La noción de una cuarta dimensión, aunque precisa, es muy abstracta y, para la gran mayoría, está más allá de la imaginación y en la región más pura del conocimiento. El desarrollo de esta idea es debido, en mucho, a nuestro relativamente pueril deseo de compatibilidad que a algo más profundo. En este mismo empeño por la compatibilidad y la generalidad, los matemáticos crearon los números negativos, los imaginarios y los trascendentes. Sin embargo, nadie había visto nunca menos tres vacas o la raíz cuadrada de menos un árbol, y no fue sin lucha como estos conceptos, hoy más bien vulgares, fueron introducidos en las matemáticas. El mismo conflicto se repitió para introducir la cuarta dimensión y todavía quedan escépticos en el campo de la oposición.

Se propusieron todas las alegorías y ficciones posibles para instar y halagar a los que dudaban, a fin de hacer más aceptable la idea de una cuarta dimensión. Hubo novelas que describían cuán imposible parecía un mundo de tres dimensiones a seres que vivieran en un mundo de dos dimensiones, hubo

cuentos de aparecidos, de golpecitos en la mesa y del país de los muertos. Para ganar siquiera una victoria parcial hacían falta ejemplos de la tierra de los vivos, que eran, todavía, menos comprensibles que una cuarta dimensión. De esto no debe inferirse que se adoptó un absurdo mayor para sostener otro menor.

Comenzando, como es usual, con Aristóteles, se demostró muchas veces que una cuarta dimensión era inconcebible e imposible. Tolomeo señaló que podían trazarse en el espacio tres rectas perpendiculares entre sí, pero una cuarta recta, perpendicular a ellas, carecería de medida o profundidad Otros matemáticos, no deseando arriesgarse a cometer una herejía mayor aún que la de ir contra la Biblia —esto es, contradecir a Euclides— advirtieron que ir más allá de las tres dimensiones equivalía a ir "contra la naturaleza". Y el matemático inglés John Wallis, de quien podría haberse esperado algo mejor, se refirió a esa "fantasía" de una cuarta dimensión, como un "monstruo en la naturaleza, menos posible que una quimera o un centauro".

Inconscientemente, un filósofo. Henry More, vino a redimirlo, aunque los matemáticos de hoy difícilmente reconocerían su ayuda. Su sugerencia no fue una bendición pura. Los espíritus de los aparecidos, dijo More, tienen, con toda seguridad, cuatro dimensiones. Pero Kant asestó un golpe terrenal al formular sus nociones intuitivas sobre el espacio, las cuales difícilmente podían ser compatibles, ni con una geometría de cuatro dimensiones ni con una no euclidiana.

En el siglo XIX varios matemáticos sobresalientes defendieron esta causa en apariencia, perdida, y abrieron un nuevo manantial matemático. La gran memoria de Riemann titulada *Sobre las hipótesis que sustentan los fundamentos de la Geometría,* conjuntamente con las obras de Cayley, Veronese, Moebius, Plücker, Sylvester, Bolyai, Grassmann, Lobachevsky, crearon una revolución en la geometría. La geometría de cuatro y de aún más dimensiones, llegó a ser una parte indispensable de las matemáticas, relacionadas con muchas otras ramas.

Fue cuando finalmente llegaron a la física matemática, al mundo físico (por alguna razón misteriosa que nunca falta) los usos y aplicaciones directas de la geometría de cuatro dimensiones cuando el niño abandonado fue de pronto reconocido y rebautizado. "¡El tiempo es la cuarta dimensión!" El gozo hizo rebosar la copa. Se dijeron cosas curiosas y maravillosas. La cuarta dimensión resolvería todos los tremendos misterios del Universo y, en última instancia, podría resultar una cura para la artritis. A tal punto se perdieron los matemáticos en el júbilo general, que algunos de ellos comenzaron a hablar de "*la cuarta* dimensión", como si en lugar de ser simplemente una idea salida de las puntas de sus lápices, sólo la cuarta en una clase de infinitas posibilidades, fuese una realidad física, como un nuevo elemento. De este modo, una lamentable confusión se propagó desde las matemáticas hasta la gramática, desde los principios del 2+2 hasta la ciencia de los usos correctos del artículo definido e indefinido.

Los físicos pueden considerar que el tiempo es una cuarta dimensión, pero no así el matemático. El físico, como otros hombres de ciencia, puede encontrar que su máquina más reciente tiene, precisamente, el lugar adecuado para algún nuevo artificio matemático; eso no le interesa al matemático. El físico puede apropiarse de nuevas partes para su máquina cambiante, todos los días, tomándolas de las matemáticas. Si se adaptan, el físico dice que son útiles, que son verdaderas, porque hay un lugar para ellas en el modelo de su mundo en preparación. Cuando ya no le sirven, puede descartarlas o "destruir toda la máquina y construir una nueva, del mismo modo que nosotros compramos un automóvil nuevo cuando el viejo deja de marchar bien" [55].

La costumbre de decir que el tiempo es una *dimensión* hace ver la necesidad de explicar qué significa esa impertinente palabra. De esta manera, también llegaremos a tener una imagen más clara de la geometría de cuatro dimensiones.

[55] Forsyth. Geometry of Four Dimensions.

En lugar de referimos a "un espacio" o a "espacios", usaremos un término más general y más de moda: *variedad* [56]. Una variedad tiene una semejanza aproximada con un conjunto. Un piano es un conjunto compuesto por todos aquellos puntos determinados únicamente por dos coordenadas. Es, por lo tanto, una variedad de dos dimensiones.

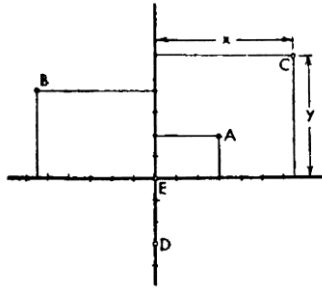


Fig. 28(a). Una variedad de dos dimensiones. Cada punto requiere un par de números para ser individualizado:

A = (3, 2)

[56] Debería insistirse en que una variedad, tal como se la define ordinariamente esta despojada de todo atributo, excepto el de ser un conjunto Por consiguiente, es fácil pensar en muchas clases de variedades muy conocidas que nada tienen que ver con el espacio o con la geometría. Una variedad de tres dimensiones sería una clase de elementos, cada uno de los cuales requiere exactamente tres números para ser identificado —para distinguirlo de todo otro elemento de la clase. Imaginemos un cilindro que contiene una cantidad de tres gases que han sido muy bien mezclados de modo que el volumen de gas o de alguna porción del mismo, queda determinado únicamente por tres números, *x*, *y* y *z*. cada uno de los cuales representa el porcentaje de los tres gases componentes en la mezcla. O. un nuevo caso; Puede considerarse como una variedad a un grupo de personas Si vemos que cinco números son necesarios y suficientes para individualizar a cada una de ellas, es decir *x* igual a la edad, *y* igual al monto de la cuenta bancaria, *z* el número de su teléfono, *u* igual a la estatura y *v* igual al peso, constituyen, pues, una variedad de cinco dimensiones Pueden idearse otros ejemplos de variedades *(a)* de cuatro dimensiones partículas de aire, 3 dimensiones para fijarlas en el espacio y 1 para fijar su densidad, *(b)* de cuatro dimensiones rodas las esferas concebidas en el espacio, 3 dimensiones para fijar sus centros, 1 para determinar sus radios.

$B = (-5\ ½, 4)$
$C = (x, y)$
$D = (0, -3)$
$E = (0, 0)$

El espacio estudiado en la geometría analítica de tres dimensiones puede considerarse como una variedad de tres dimensiones, porque se requieren exactamente tres coordenadas para fijar cada punto en él. Generalizando, si se necesitan n números para especificar, para individualizar, cada uno de los miembros de una variedad, ya sea un espacio o cualquier otra clase, se les denomina una variedad de *n* dimensiones.

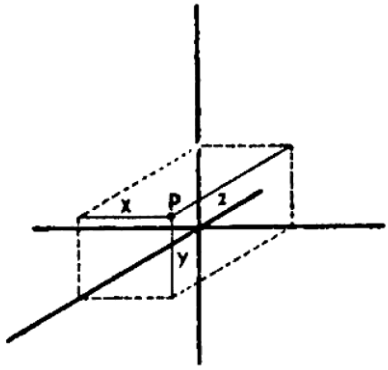


Fig. 28(b). El mismo concepto puede hacerse extensivo a una variedad de tres dimensiones (espacio). Cada punto requiere tres números para ser individualizado. Así, $P = (x, y, z)$.

De este modo, la palabra *dimensión*, con sus muchas connotaciones misteriosas e incrustaciones lingüísticas, ha sido sustituida por una idea sencilla —la de *coordenada*. Y en lugar de la palabra física *espacio*, el matemático introduce el concepto más general y más exacto, de *clase o variedad.*

Ahora es posible, como consecuencia de estos refinamientos, introducir un concepto ya conocido desde nuestro estudio de la geometría analítica y que servirá para caracterizar de

manera única las variedades del espacio. Para ello utilizaremos un razonamiento geométrico.

El teorema de Pitágoras establece que, en un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.

Cuando esto se traslada a la geometría analítica de dos dimensiones, resulta la conocida fórmula de acuerdo a la cual, la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano, de coordenadas (x, y) y (x', y'), respectivamente, es $\sqrt{(x-x')^2+y-y')^2}$.

Análogamente, en la geometría analítica de tres dimensiones, la distancia entre dos puntos cualesquiera, de coordenadas (x, y, z), y (x', y', z') respectivamente, es:

$$\sqrt{x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

Ahora bien, tanto en dos como en tres dimensiones el concepto de distancia, en la forma en que el matemático y el lego lo entienden, es el mismo. El lego queda satisfecho con un entendimiento intuitivo, el matemático exige una formulación exacta. Sin embargo, en las dimensiones superiores, mientras el lego queda detenido por un muro infranqueable —las limitaciones naturales de sus sentidos— el matemático escala esa pared utilizando su fórmula ampliada, como escalera. La distancia en cuatro dimensiones nada significa para el lego. Y es lógico que así sea, puesto que un espacio de cuatro dimensiones está totalmente fuera de la imaginación ordinaria. Pero el matemático, que asienta el concepto sobre una base enteramente distinta, no tiene la obligación de luchar con los límites de la imaginación, sino solamente con las limitaciones de sus facultades lógicas.

Por consiguiente, no hay razón para no generalizar la fórmula anterior a 4, 5, 6… o n dimensiones. De este modo, en una variedad euclidiana de cuatro dimensiones, la distancia de un elemento, por ejemplo, el punto de coordenadas (x, y, z, u), a otro elemento de coordenadas (x', y', z', u') es:

$$\sqrt{x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+(u-u')^2}$$

Este método nos permite definir, en términos de la geometría analítica, una variedad euclidiana de 2, 3, 4 ... o *n* dimensiones. Una definición análoga puede darse para las variedades de otras geometrías, en cuyo caso se aplicaría alguna otra fórmula para la distancia. Hemos elegido la geometría analítica y tomado la fórmula pitagórica de la distancia para distinguir las variedades euclidianas.

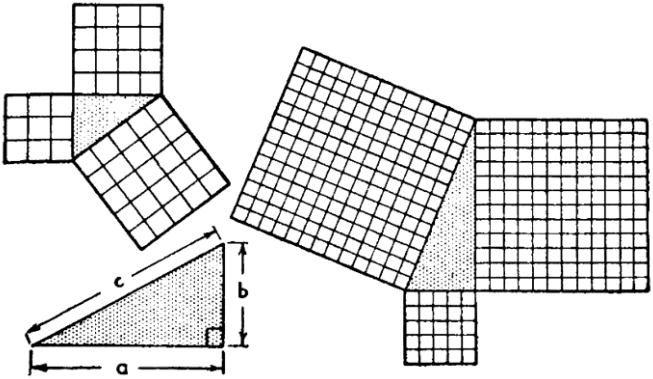


Fig. 29. El teorema de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo:

$c^2 = a^2 + b^2$

o sea $5^2 = 3^2 + 4^2$

$13^2 = 12^2 + 5^2$

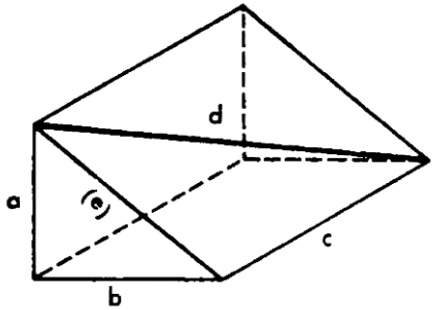
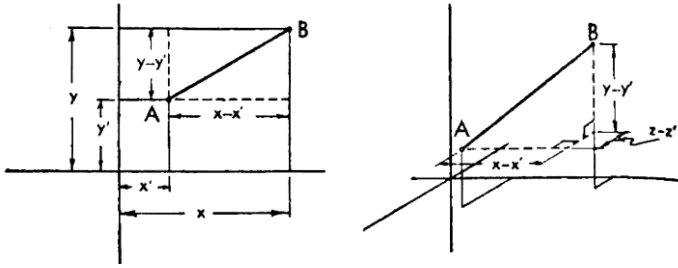


Fig. 30. El teorema de Pitágoras en tres dimensiones:

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Pues: $d^2 = c^2 + (e)^2$
y $(e)^2 = a^2 + b^2$



(1) Dos dimensiones (2) Tres dimensiones

(1) Distancia AB = $\sqrt{(x-x')^2 + y-y')^2}$.
(2) Distancia AB = $\sqrt{x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.
Fig. 31

Una definición abreviada de las variedades de tres y cuatro dimensiones, en términos de la geometría analítica, reza así [57].

1. Una variedad euclidiana de tres dimensiones es el conjunto de todas las temas de números: (x, y, z), (x', y', z') (x'', y'', z''), etc., a dos cualesquiera de las cuales puede asignarse de manera única una *medida* llamada distancia entre ellos, definida por la fórmula $\sqrt{x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$. Ciertos subconjuntos de este conjunto se denominan puntos, rectas, planos, etc. Los teoremas deducidos de estas definiciones constituyen un sistema matemático llamado "Geometría Analítica de Tres Dimensiones".
2. Una variedad euclidiana de cuatro dimensiones es la clase de todas las tétradas de números (x, y, z, u), (x', y', z', u'), (x'', y'', z'', u''), etc., a dos cualesquiera de las cuales puede asignarse de manera única una *medida* (llamada distancia entre ellos), definida por la fórmula:

[57] Nobeling. "Die vierte Dimensión und der krumme Raum" en *Krise und Neuaufbau*. Leipzig Deuticke 1933.

$$\sqrt{x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+(u-u')^2}$$

Ciertas subclases de esta clase se denominan puntos, rectas, planos e *hiperplanos.* La geometría analítica euclidiana de cuatro dimensiones es el sistema formado por los teoremas que se deducen de estas definiciones.

Nótese que nada se ha dicho, en ambas definiciones, acerca del espacio de nuestras percepciones sensoriales, ni del espacio del físico, ni el espacio del filósofo. Todo cuanto hemos hecho es definir dos sistemas matemáticos que son lógicos y compatibles consigo mismos, que pueden ser jugados como el juego de damas o las charadas, de acuerdo con reglas establecidas. Quienquiera que encuentre una semejanza entre su juego de damas o sus charadas y la realidad física de su experiencia tendrá el privilegio de extraer moralejas, y aprovechar sus sugerencias.

Pero habiendo establecido que estamos en el reino de los conceptos puros, más allá de los límites más elásticos de la imaginación, ¿quién queda satisfecho? Incluso el matemático desearía dar un mordisco a la fruta prohibida, vislumbrar qué le parecería si pudiese, por un instante, introducirse en una cuarta dimensión.

Para empeorar las cosas, los libros de ciencia popular han hecho todo tan ridículamente simple —relatividad, la teoría cuántica, y tantas otras cosas— que estamos avergonzados de nuestra incapacidad para describir una cuarta dimensión como algo más concreto que el tiempo.

Se han intentado representaciones gráficas de figuras de cuatro dimensiones, pero no puede decirse que estos esfuerzos hayan sido coronados de éxito. La figura 31 representa el símil en cuatro dimensiones de un cubo de tres dimensiones, llamado *hipercubo* o *tesseract:* Nuestras dificultades para dibujar esta figura no están, en modo alguno, disminuidas por el hecho de que una figura de tres dimensiones puede dibujarse solamente *en perspectiva* sobre una superficie de dos dimensiones —como esta página—, mientras que el objeto de

cuatro dimensiones, sobre una página de dos dimensiones, es sólo una perspectiva de una "perspectiva".

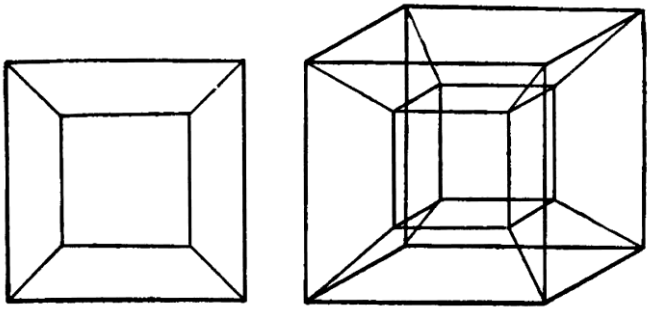


Fig. 31. El cubo y el tesseract.

Sin embargo, ya que a^2 es igual al área de un cuadrado, a^3 el volumen de un cubo, presentimos que a^4 describe algo, cualquier cosa que sea. Sólo por analogía podemos razonar que ese "algo" es el *hipervolumen* (o contenido) de un hipercubo. Prosiguiendo nuestro razonamiento, deducimos que el hipercubo está limitado por 8 cubos, tiene 16 vértices. 24 caras y 32 aristas. Pero la representación de una imagen mental clara del hipercubo es otra historia.

Afortunadamente, sin tener que recurrir a diagramas deformados, podemos valernos de otros medios, usando objetos familiares para ayudar a nuestra débil imaginación a representarse una cuarta dimensión.

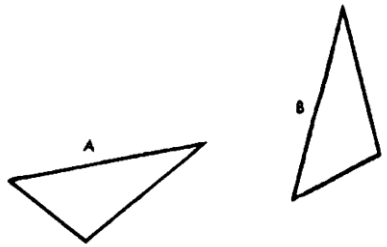


Fig. 32

Los dos triángulos A y B de la figura 32 son exactamente iguales.

Geométricamente, se dice que son congruentes[58], queriendo significar que con un movimiento adecuado puede superponerse perfectamente uno de ellos sobre el otro. Evidentemente, ese movimiento puede llevarse a cabo en un plano, es decir, en dos dimensiones, deslizando simplemente el triángulo A sobre el B [59]. Pero, ¿qué ocurriría con los triángulos C y D de la figura 33?

Fig. 33

Uno de ellos es imagen reflejada del otro. Parecería que no hay razón alguna para que, haciendo deslizar o girar en el plano al triángulo C, no pueda éste superponerse a D. Y, aunque resulte bastante extraño, esto no puede hacerse. C o D debe ser alzado del plano, de las dos dimensiones, llevado a un espacio de tres, para efectuar la superposición. Levante a C. voltéelo, póngalo de nuevo en el plano y entonces podrá ser deslizado sobre D.

Luego, si para la solución de ciertos problemas en dos dimensiones es esencial una tercera dimensión, del mismo modo, una cuarta dimensión haría posible la solución de otros problemas insolubles en tres dimensiones. Por cierto que estamos en el reino de la fantasía y apenas necesitamos señalar que no existe una cuarta dimensión capaz de convertimos a todos en Houdinis. Sin embargo, en estudios teóricos, es de señalada importancia una cuarta dimensión y forma parte de la trama y urdimbre de la física y matemáticas teóricas modernas. Los ejemplos elegidos de estos temas son muy difíci-

[58] Para una definición exacta, véase el capítulo sobre paradojas.

[59] En realidad, "deslizarse por encima de" seria imposible en un mundo de dos dimensiones.

les y estarían fuera de lugar, pero algunos más simples, en dimensiones menores, pueden resultar entretenidos.

Si viviésemos en un mundo de dos dimensiones, como el descrito tan gráficamente por Abbott en su famosa novela *Flatland* [60], nuestra casa sería una figura plana, como la de la figura 34. Entrando por la puerta A estaríamos a salvo de nuestros amigos y enemigos una vez cerrada la puerta, aun cuando no hubiese techo sobre nuestra cabeza y las paredes y las ventanas fuesen simplemente líneas. Para pasar por encima de estas líneas habría que salir del plano y entrar en una tercera dimensión y, por supuesto que nadie en un mundo de dos dimensiones estaría, para hacerlo, en condiciones mejores que lo estamos nosotros para escapar del interior de una caja fuerte, bajo llave, y colocada en una cueva, valiéndose de una cuarta dimensión. Un gato de tres dimensiones podría espiar a un ratón bidimensional, pero éste jamás lo advertiría.

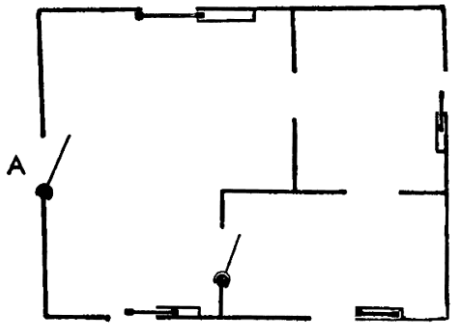


Fig. 34. Éste no es un plano, sino una casa real en Planilandia.

Cuando llega el invierno a Planilandia sus habitantes usan guantes. Hasta ahora la ciencia moderna no ha podido solucionar el problema que se le plantea al hombre que se encuentra con dos guantes de la mano derecha, en lugar de uno de la derecha y otro de la izquierda. El mismo problema existiría en Planilandia. Pero allí, Gulliver, mirando a sus habitantes des-

[60] Que en este libro se tradujo como Planilandia *(N del R)*

de la altura de una tercera dimensión, vería al instante, así como en el caso de los dos triángulos de la figura 33, que todo lo que se necesita para convertir el guante derecho en uno izquierdo *es levantarlo* y *darle vuelta.* Por supuesto que nadie en Planilandia podría levantar un dedo para hacer eso mismo, puesto que ello implicaría una dimensión extra.

Fig. 35. Las manos de tres dimensiones son así:

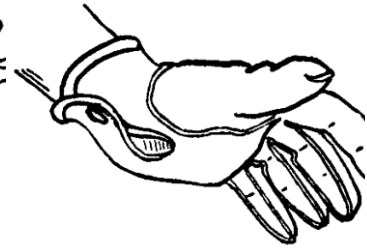


Fig. 36. …y los guantes así:

En Planilandia las manos tienen este aspecto:

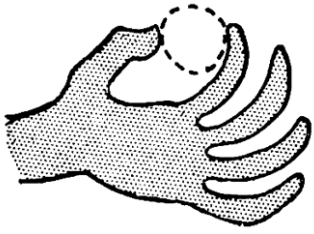


Fig. 37.

Fig. 38.

Así pues, si nosotros pudiésemos ser transportados a una cuarta dimensión, no habría fin a la cantidad de milagros que podríamos realizar, empezando con la rehabilitación de todos los guantes mal apareados. Alce el guante derecho del espacio de tres dimensiones, llévelo hasta la cuarta dimensión, dele vuelta, tráigalo nuevamente, y helo convertido en un guante izquierdo. Ninguna celda podría encerrar al Gulliver de cuatro dimensiones, que sería de una amenaza mucho más seria que un hombre simplemente invisible. Gulliver podría tomar un nudo y desatarlo sin tocar los extremos y sin cortarlo, con sólo transportarlo a la cuarta dimensión y hacer deslizar la cuerda a través de la abertura adicional.

O bien, podría separar los dos eslabones de una cadena sin romperlos. Todo esto y mucho más le resultaría absurdamente sencillo, y contemplaría nuestra impotencia con la misma diversión y lástima con que nosotros miramos a los desdichados seres de Planilandia.

Nuestra novela debe terminar. Si la misma ha ayudado a algunos lectores a hacerles más real una cuarta dimensión y ha satisfecho un común anhelo antropomórfico, habrá cumplido su finalidad. En lo que a nosotros se refiere, confesamos que las fábulas jamás han aclarado los hechos.

Una idea asociada en sus orígenes con duendes y espíritus requiere, para ayudar a la ciencia, ser despojada, dentro de lo posible, de todo pensamiento confuso. Debe ser encarada clara y valientemente si se desea descubrir su verdadera esencia. En caso contrario, es aún más estúpido rechazarla y ridiculizarla que glorificarla y guardarla como reliquia. Ningún concepto salido de nuestras mentes o de nuestras plumas ha señalado un mayor avance de nuestro pensamiento, ninguna idea religiosa, filosófica o científica rompió más bruscamente con la tradición y los conocimientos comúnmente aceptados, que la idea de una cuarta dimensión.

Eddington lo ha expresado muy bien[61]:

[61] Eddington. Espacio, tiempo y gravitación.

> Por muy satisfactoria que pueda ser la teoría de un mundo de cuatro dimensiones, es difícil no prestar atención a una voz que dentro de nosotros nos dice al oído: "En el fondo de tu mente, sabes que una cuarta dimensión es toda una insensatez." Me imagino que esa misma voz ha estado a menudo muy activa en la historia pasada de la física ¡Qué disparate decir que esta mesa sólida sobre la cual estoy escribiendo es una colección de electrones que se mueven con prodigiosa velocidad en espacios vacíos, que, con relación a las dimensiones electrónicas son tan extensos como los espacios entre los planetas del Sistema Solar! ¡Qué desatino afirmar que el tenue aire está tratando de aplastar mi cuerpo con una carga de 1 kilogramo por centímetro cuadrado! ¡Qué absurdo pretender que el grupo de estrellas que estoy viendo a través del telescopio, evidentemente allí *ahora*, es un reflejo de una época pasada de hace 50.000 años! No nos dejemos engañar por esta voz. Está desacreditada.
>
> Hemos encontrado una huella extraña en las playas de lo desconocido. Hemos ideado teorías profundas, una después de otra, para explicar su origen Al fin hemos logrado reconstruir al ser que dejó esa huella Y. ¡he aquí! Es la nuestra.

Hemos subrayado el hecho de que la geometría pura está divorciada del espacio físico que percibimos a nuestro alrededor y ahora estamos en condiciones de atacar un concepto algo más difícil. No está de más, sin embargo, tratar de distinguir primero, en forma distinta a como lo hicimos antes, la diferencia entre el espacio tal como se le concibe ordinariamente y las variedades, que son los espacios de las matemáticas. Quizás esta distinción contribuirá a que nuestro nuevo concepto —las geometrías no euclidianas— parezca menos extraño.

Estamos muy acostumbrados a considerar al espacio como infinito, no en el sentido matemático técnico de los conjuntos infinitos, sino simplemente para significar que el espacio no tiene límites, que es sin fin. Por cierto que la experiencia cotidiana no nos enseña nada de eso. Los límites de un ciudadano particular, raramente llegan más allá de la extremidad de su brazo derecho. Las fronteras de una nación, como saben

muy bien los contrabandistas de tabaco, no van más allá de la frontera de las doce millas.

La mayor parte de nuestras creencias acerca de la infinitud del espacio nos vienen de haberlas oído y, otra parte, de lo que pensamos que vemos. Así, por ejemplo, las estrellas parecen estar a millones de kilómetros, aunque en una noche oscura, una vela, a medio kilómetro de distancia, produciría la misma impresión. Además, si imaginamos que nuestro cuerpo se reduce hasta el tamaño de un átomo, entonces un guisante, a la distancia de dos o tres centímetros, nos parecería mucho más enorme y mucho más distante que el Sol.

La distinción entre el espacio del individuo y el "espacio público" pronto resulta evidente. Nuestro conocimiento personal del espacio no nos demuestra que sea infinito, homogéneo o isótropo No sabemos que es infinito, porque nos arrastramos, saltamos o volamos sólo en reducidas regiones. No lo sabemos homogéneo porque un rascacielos, visto a distancia, parece mucho más pequeño que la punta de nuestra nariz y el peinado de la dama que está sentada delante de nosotros en el cine, nos impide ver la pantalla en su totalidad; y sabemos que no es isotrópico, es decir, que "no posee las mismas propiedades en todas direcciones" [62], porque hay puntos ciegos en nuestra vista y nuestro sentido visual nunca es igualmente bueno en todas direcciones.

La noción de espacio físico o "público", que abstraemos de nuestra experiencia individual, tiene por objeto liberamos de nuestras limitaciones personales. Decimos que el espacio físico es infinito, homogéneo, isótropo y euclidiano. Estas galanterías son fáciles de dedicar a una entidad ideal sobre la cual muy poco se sabe en realidad. Si preguntásemos al físico o al astrónomo; "¿Qué piensa usted acerca del espacio?" podría respondernos: "A fin de realizar medidas experimentales y describirlas con mayor comodidad, el físico opta por ciertos convenios con respecto a sus aparatos de medida y a las operaciones ejecutadas con los mismos. Se trata, hablando

[62] Lindsay and Margenau, *Foundation of Physics*.

rigurosamente, de convenios relativos a objetos *físicos* y a operaciones *físicas*. Sin embargo, para fines prácticos, es conveniente atribuirles una generalidad que trasciende de cualquier conjunto concreto de objetos u operaciones. Entonces llegan a ser, como decimos, propiedades del espacio.

Esto es lo que significa espacio físico, que podemos definir, brevemente, como la construcción abstracta que posee aquellas propiedades de los cuerpos rígidos que son independientes de su contenido material. EL espacio físico es aquel en que se basa la casi totalidad de la física y es, por supuesto, el espacio de las acciones cotidianas[63]."

Por otra parte, los espacios, o más generalmente las variedades que consideran los matemáticos, están construidas sin referencia alguna a las operaciones físicas tales como la medición. Poseen sólo aquellas propiedades expresadas en los postulados y axiomas de la geometría particular en cuestión, así como todas las otras propiedades que se deducen de los mismos.

Bien puede ser que los postulados sean sugeridos, en parte o en su totalidad, por el espacio físico de nuestra experiencia, pero debemos considerarlos como completamente desarrollados e independientes. Si los experimentos demostrasen que algunas, o todas nuestras ideas sobre el espacio físico son erróneas (como, en efecto, lo ha hecho la teoría de la relatividad), tendríamos que escribir de nuevo todos nuestros textos de física, pero no nuestras geometrías.

Pero esta aproximación al concepto del espacio, así como al concepto de geometría, es comparativamente reciente. No ha habido movimiento más arrollador en toda la historia de la ciencia, que el desarrollo de la geometría no euclidiana, un movimiento que estremeció hasta sus cimientos las creencias, proveniente de épocas remotas, de que Euclides había expresado verdades eternas. Capaz y exacta como instrumento de medida desde la época de los egipcios, intuitiva y plena de

[63] *Op cit.*

sentido común, santificada y apreciada como uno de los más ricos legados intelectuales de Grecia, la geometría de Euclides se irguió, durante más de veinte siglos, en solitaria, resplandeciente e intachable majestad. Estaba verdaderamente defendida por la divinidad y si Dios, como dijo Platón, alguna vez hizo geometría, con toda seguridad que consultó a Euclides las reglas. Los matemáticos que de vez en cuando tenían dudas, pronto expiaban su herejía con ofrendas votivas, bajo la forma de nuevas demostraciones que corroboraban a Euclides. Ni siquiera Gauss, el "Príncipe de los Matemáticos", se atrevió a exponer sus críticas por temor al vulgar denuesto de los "Beocios" [64].

¿De dónde vinieron las dudas? ¿De quién provino la inspiración de quienes se atrevieron a profanar el templo? ¿No eran acaso los postulados de Euclides evidentes en sí mismos y claros como la luz del día? ¿Y sus teoremas, no eran tan inexpugnables como 2+2 igual a 4? El centro de la siempre creciente tormenta que estalló, al fin, en el siglo XIX, fue su famoso quinto postulado sobre las líneas paralelas.

Este postulado puede enunciarse así: "Por cualquier punto del plano puede trazarse una, y sólo una, recta paralela a una recta dada."

Existe algún indicio para demostrar que el mismo Euclides no consideró a este postulado "tan evidente en sí mismo" como los demás[65]. Los filósofos y los matemáticos que intentaron reivindicarlo, pretendieron demostrar que se trataba en realidad de un *teorema* y, de este modo, que podía deducirse de sus premisas. Pero todas estas tentativas fracasaron por la sencilla razón de que Euclides, mucho más sabio que quienes lo sucedieron, había ya reconocido que el quinto postulado era simplemente una suposición y, por lo tanto, no podía demostrarse matemáticamente.

---

[64] Beocio. Perteneciente a una región de Grecia antigua y también significa ignorante, tonto, estúpido, según el Diccionario de la R, A Española *(N del R)*

[65] Young. Fundamental Concepts of Algebra and Geometry; New York Macmillan. 1911.

Más de dos mil años después de Euclides, un alemán, un ruso y un húngaro, vinieron a hacer añicos dos "hechos" incontestables. El primero, que el espacio obedecía a Euclides; el segundo, que Euclides obedecía al espacio. Gauss nos merece fe. No conociendo el alcance de sus investigaciones, en deferencia tanto a su grandeza como a su integridad, somos receptivos a su declaración de que había llegado, independientemente, a conclusiones semejantes a las del húngaro Bolyai, algunos años antes que el padre de Bolyai informara a Gauss acerca de la obra de su hijo.

Lobachevski, el ruso, y Bolyai, ambos en 1830, presentaron sus notables teorías al muy apático mundo científico de la época. Sostuvieron que no podía demostrarse el tan perturbador postulado y que tampoco podía deducirse de otros axiomas, porque sólo era un *postulado.* En su lugar, podía ser reemplazado por cualquier otra hipótesis sobre las paralelas y, como consecuencia de ello, surgiría una geometría diferente, tan compatible como "verdadera". Se conservarían todos los demás postulados de Euclides sólo que, en lugar del quinto, debía procederse a una sustitución; "A través de cualquier punto del plano, pueden trazarse *dos rectas* paralelas a una recta dada."

Del día a la noche las matemáticas se habían desprendido, pues, de las cadenas que las aprisionaban y había nacido una nueva línea de investigación teórica y práctica, ricamente fecunda.

Fig. 39

En la figura 39 hay dos rectas paralelas: ¿Cómo es posible, podrá usted preguntar, que otra recta distinta de *BC* y sin embargo, paralela a *DE* pueda trazarse por *A*? La respuesta es que el lector está hablando del plano físico y de líneas trazadas con un lápiz. Está obsesionado por los fantasmas del sentido común, en lugar de razonar en términos de geometría

pura. *Usted* puede ir más lejos y decir que en su sistema, en la geometría euclidiana, cualquier recta distinta de *BC* cortará a *DE* si se la prolonga lo suficiente. *Nosotros* le responderíamos que esa regla se aplica en su juego, pero no en el nuestro, la geometría de Lobachevski. Ninguno de nosotros, si somos matemáticos, está hablando del espacio físico, pero si así lo hiciésemos, habría más motivos para creer que somos nosotros, y no usted, quienes estamos diciendo la verdad.

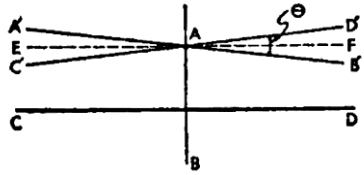


Fig. 40

Podemos presentar a la geometría de Lobachevski de la siguiente manera: En la figura 40 la recta *AB* es perpendicular a *CD*. Si la hacemos girar alrededor de *A*, en sentido levógiro, cortará a *CD* en varios puntos a la derecha de *B* hasta .alcanzar una posición límite *EF*, en la cual será paralela a *CD*. Continuando la rotación, comenzará a cortar a *CD* a la izquierda de *B*. Euclides supuso que hay solamente *una* posición para la recta, a saber la *EF*, en la cual sería paralela a *CD*. Lobachevski supuso que había dos de dichas posiciones, representadas por *A'B'* y *C'D'* y además, que todas las rectas comprendidas dentro del ángulo, aun cuando no son paralelas a *CD, jamás* la encontrarán, por mucho que se prolonguen.

Ahora bien, esto es una suposición y no tiene sentido alegar, fundados en el diagrama, que es evidente que si *A'B o C'D'* fuesen prolongadas lo suficiente entonces llegarían, finalmente, a cortar a *CD*. Si, como ha señalado el profesor Cohen, confiamos por entero en nuestra intuición del espacio, que es finito, habrá siempre un ángulo *H.* cada vez más pequeño a medida que nuestro espacio se extiende, pero que

nunca desaparece, y ninguna de las rectas comprendidas dentro de θ llegan a cortar a la recta dada.[66]

¿Qué le sucede a la geometría de Euclides cuando su postulado sobre las paralelas es reemplazado por el de Lobachevski? Muchos de sus teoremas importantes, los que en modo alguno dependen del quinto postulado, son válidos en ambas geometrías. Así por ejemplo:

1. Si dos líneas rectas se cortan, los ángulos opuestos por el vértice son iguales:
2. En un triángulo isósceles, los ángulos adyacentes a la base son iguales:
3. Desde un punto puede trazarse sólo una perpendicular a una recta dada:

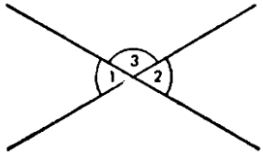


Fig. 41. Ángulo 1 = ángulo 2 (porque cada uno es igual a 180° menos el ángulo 3).

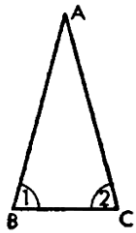


Fig. 42. Si *AB* = *AC*, entonces el ángulo 1 = ángulo 2.

[66] Morris Raphael Cohén. *Reason and Nature*.

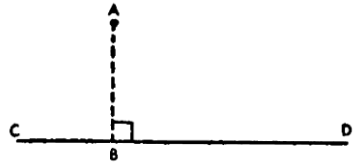


Fig. 43. Desde el punto *A* puede trazarse una y sólo una perpendicular a *CD*.

Por otra parte, algunos teoremas muy importantes de la geometría euclidiana quedan alterados, con resultados sorprendentes, cuando se sustituye al quinto postulado por otro. Así, en la geometría euclidiana, la suma de los ángulos de todo triángulo es *igual* a 180°; mientras que en la geometría de Lobachevski, la suma de los ángulos de un triángulo *es menor que* 180°.

Las rectas paralelas en la geometría euclidiana nunca se cortan y quedan separadas a una distancia constante, por más que se prolonguen. Las rectas paralelas en la geometría de Lobachevski *nunca se encuentran; pero se aproximan una a otra asintóticamente*, es decir, la distancia entre ellas se hace cada vez menor a medida que se prolongan.

Citemos un teorema más interesante. En la geometría euclídea, dos triángulos pueden tener, respectivamente, ángulos iguales, pero áreas diferentes; uno puede ser, por así decirlo, ampliación fotográfica del otro. En cambio, en la geometría de Lobachevski, *al aumentar el área del triángulo, la* suma *de sus ángulos disminuye*; así pues, sólo los triángulos de una misma área pueden tener ángulos iguales.

El talentoso Riemann, en su famosa tesis doctoral: *Sobre las hipótesis que son los fundamentos de la Geometría,* propuso aún otro sustituto para el quinto postulado de Euclides, distinto del de Lobachevski y Bolyai. Esta proposición sostiene que: "Desde un punto del plano no puede trazarse *ninguna* recta paralela a una recta dada." En otras palabras, cada par de rectas en el plano deben cortarse. Debe notarse que esto contradice la tácita suposición de Euclides de que una línea

recta puede prolongarse indefinidamente. A propósito de esto, Riemann señaló la importante distinción entre infinito y no acotado: Así, el espacio puede ser finito aunque *no acotado*. Moviéndonos en una dirección dada, como las agujas de un reloj, podemos mantenemos por siempre en marcha volviendo eternamente sobre nuestros pasos. Como era dable esperar, la hipótesis de Riemann también afecta a aquellos teoremas de Euclides que dependen del quinto postulado. Tanto la geometría de Euclides como la de Lobachevski establecen que solamente puede trazarse una perpendicular a una recta, desde un punto dado. Pero en la geometría de Riemann puede trazarse cualquier número de perpendiculares, desde un punto cualquiera a una recta dada. Ahora, la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que 180° en la geometría de Riemann, y los ángulos aumentan a medida que el triángulo se agranda (véase la fig. 47[a]).

Tenemos, pues, tres sistemas de postulados: el de Euclides, el de Lobachevski y el de Riemann. De los mismos se han desarrollado tres geometrías, la primera, euclidiana. Las otras dos, no euclidianas. Las geometrías no euclidianas deben mucho, por supuesto, a los postulados y métodos de Euclides. En lo que se refiere a los postulados, sólo difieren con respecto al postulado de las paralelas. Los teoremas en cambio, difieren en muchos aspectos.

Poco antes expusimos el criterio para todo sistema matemático: que sus postulados deben ser compatibles, es decir, no deben conducir a contradicciones. Pero, ¿cómo vamos a descubrir si las geometrías no euclidianas de Lobachevski y de Riemann son compatibles? Más aún, bien podría uno preguntarse, ¿cómo estamos ciertos de que los postulados de Euclides no dan lugar a contradicciones? Evidentemente, podemos acumular teorema tras teorema sin encontrar contradicción alguna, pero eso no constituye una prueba de que no pueda surgir ninguna en un tiempo futuro. ¿Acaso no estamos nosotros en mejores condiciones que si estuviésemos verificando una hipótesis de la física o de cualquier otra ciencia experimental?

Afortunadamente los matemáticos han ideado un recurso que satisface su conciencia sobre el particular. Consiste en demostrar, por ejemplo, en la geometría no euclidiana, que un conjunto de entidades que existen en la geometría euclidiana satisfacen los teoremas no euclidianos. Se supone que estas entidades, en sí mismas, están "libres de contradicciones y que, en efecto, incluyen, por completo, a los axiomas" [67] y se demuestra que estos últimos no implican incompatibilidades. Tomemos, separadamente, ejemplos de las geometrías de Lobachevski y de Riemann para aclarar el significado de todo esto.

La figura 44 representa la superficie engendrada por la revolución de una curva denominada *tractriz* alrededor de un eje horizontal.

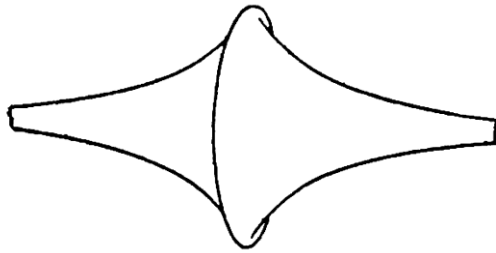


Fig. 44. La seudoesfera.

La tractriz misma puede obtenerse de la siguiente manera: Sobre un par de ejes perpendiculares entre sí, como en la geometría cartesiana, imaginemos una cadena tendida a lo largo de *YY'*. A uno de los extremos de esta cadena está enganchado un reloj; el otro extremo coincide con el punto de origen O. Manténgase tensa la cadena y tírese lentamente del extremo libre, a lo largo del eje *X*, a la derecha de O. Repítase luego este movimiento hacia la izquierda. La trayectoria del reloj, en ambos casos, engendra la tractriz. Si ahora se hace

[67] Cohen and Nagel, *Introduciion to Logic and Scientific Method.* New York. Harcourt Brace. 1934.

girar esta curva alrededor de la línea *XX'* se forma una superficie que E. T. Bell denomina "superficie de doble trompeta".

Beltrami llamó *seudoesfera* a esta superficie. Encontramos que la geometría aplicable sobre una seudoesfera es la de Lobachevski. Por ejemplo, sobre la seudoesfera, desde un punto dado, pueden trazarse dos líneas paralelas a una tercera, que se aproximan asintóticamente a ella sin llegar a cortarla[68]. De este modo, la geometría de Lobachevski queda satisfecha por una entidad de la geometría de Euclides, cumpliendo, así, con el criterio de compatibilidad.

La geometría de Riemann es aplicable a un objeto muy familiar, la esfera. Puede verse en la figura 46 que un plano que pasa por el centro de una esfera corta su superficie según un *círculo máximo*.

[68] El siguiente diagrama (49) es un ejemplo, algo detallado, de esta proposición Se traza una perpendicular a la línea *G* perteneciente a la seudoesfera; desde un punto *O* deben trazarse dos paralelas a la línea *G*. Márquese la distancia S sobre *G*, determinando el punto *Q*. Por *Q* levántese una perpendicular a *G*. Luego, si trazamos un círculo con centro *O* y radio *S*. esta circunferencia, cortará a *QT* en S_1 y S_2. Estos dos puntos al ser unidos con *O*. determinan las dos paralelas a *G*, P_1 y P_2. Todas las líneas que pasan por *O*, formando un ángulo menor que θ no cortan a *G*, aun cuando no son paralelas a ella. Este diagrama lo hemos tomado de Colerus. *Vom Punkt zur vierten Dimensión*. Viena, Zsolnay, 1935.

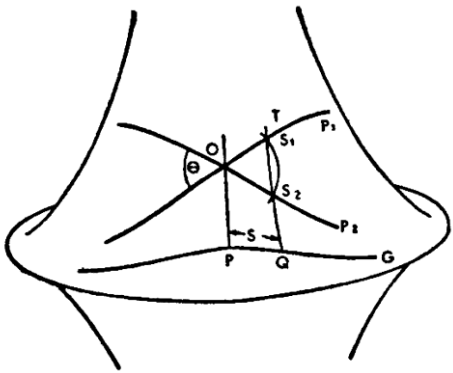


Fig. 49

Aunque la Tierra es algo achatada por los polos, podemos considerarla esférica, para los fines de esta discusión. Todo círculo que pase por los polos Norte y Sur, sobre la superficie de la Tierra, es un círculo máximo (meridiano), pero con la excepción del ecuador, los círculos de latitud o paralelos, no lo son. Las líneas rectas trazadas sobre la superficie de la Tierra son siempre parte de círculo máximo y *aun cuando dos de dichas líneas sean perpendiculares a una tercera (lo cual en la geometría euclidiana significaría que son paralelas), siempre se cortarán en un par de polos.* De este modo, los elementos para una geometría que satisfaga la superficie de la Tierra, son idénticos a los de la geometría riemanniana. Por ejemplo, un triángulo trazado sobre la superficie de la Tierra tendrá ángulos cuya suma será mayor de 180° y, cuanto mayor sea el triángulo, mayor será la suma de sus ángulos.

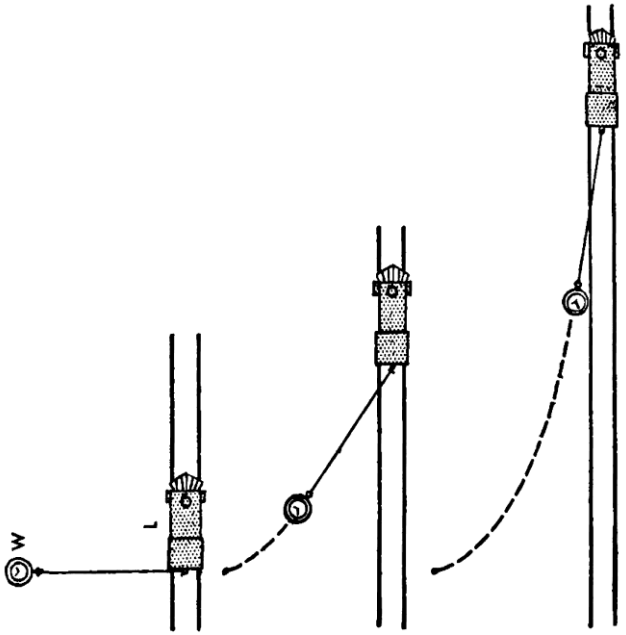


Fig. 45(a). Una forma de engendrar la tractriz. La locomotora de juguete está atada al reloj *W*, quedando la cuerda perpendicular a la vía. Cuando la locomotora se pone en marcha, la trayectoria del reloj es una tractriz.

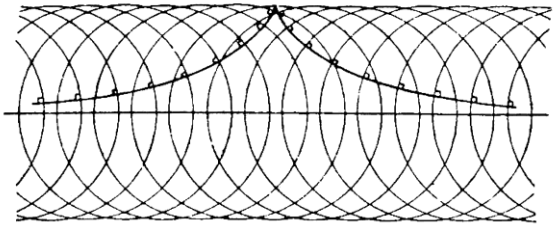


Fig. 45(b). La tractriz también es la curva que es perpendicular a una familia de círculos de igual radio cuyos centros pertenecen a una misma línea recta.

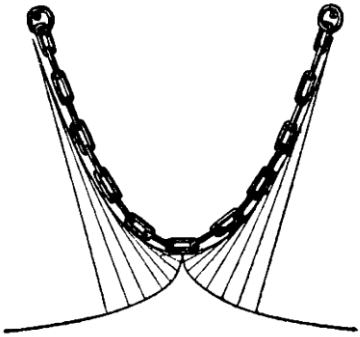


Fig. 45(c). La curva formada por una cadena que cuelga libremente se denomina catenaria. Si se trazan las tangentes a una catenaria, la curva normal a ellas y que encuentra a la catenaria en su punto más bajo es, de nuevo, la tractriz.

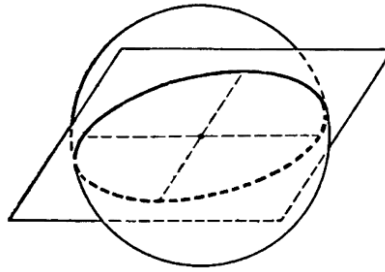


Fig. 46

Además, dos líneas rectas trazadas sobre la superficie de la Tierra, si se las prolonga suficientemente, encerrarán siempre una superficie. Es conveniente recordar, a esta altura del texto, la importante distinción notada por Riemann de que una superficie puede ser finita pero no acotada, de manera que las líneas rectas trazadas sobre la superficie de la Tierra *pueden* extenderse en forma indefinida aunque es evidente que la superficie no es infinita, sino simplemente no acotada. Las propiedades riemannianas de la esfera han sido expuestas en forma divertida en el siguiente acertijo: Un grupo de deportistas, una vez armadas sus tiendas de campaña, se pusieron en marcha para cazar osos. Caminaron 15 kilómetros hacia el Sur y luego 15 kilómetros hacia el Este, divisando un oso. Lo cazaron y volvieron al campamento, descubriendo que, en conjunto, habían recorrido 45 kilómetros. ¿De qué color era el oso?

Nuestra breve exposición sobre la geometría no euclidiana despertará en la mente del lector muchas preguntas que no son de nuestra incumbencia, pero la literatura al respecto, aun la literatura popular, es tan extensa, que nadie suficientemente interesado necesita andar mendigando respuestas.

Sin embargo, tal vez sea conveniente considerar una pregunta muy natural que podría asumir la siguiente forma: "Sobre una esfera, dos líneas rectas, aunque paralelas en un lugar, indudablemente se cortan (si se las prolonga suficientemente)

y pueden encerrar una superficie. ¿Por qué, entonces, llamar 'rectas' a dichas líneas? ¿No son acaso realmente curvas?"

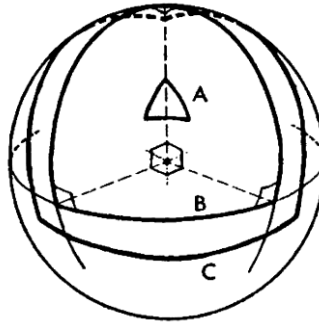


Fig. 47(a). El triángulo *A es* pequeño comparado con la esfera; por lo tanto, casi es un triángulo plano y la suma de sus ángulos se aproxima a 180°. Pero a medida que crece y llega a convertirse en el triángulo *B*, cuyos lados pertenecen a tres círculos máximos perpendiculares entre sí, vemos que la suma de sus ángulos llega a ser: 90°+90°+90° = 270°. En el triángulo *C*, mayor aún que el anterior, los ángulos, que son todos obtusos, dan una suma mayor que 270°.

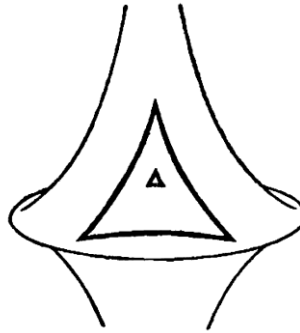


Fig. 47(b). Esto es lo contrario de lo que ocurre en una esfera, fig. 47(a). En una seudoesfera, a medida que el triángulo crece, resulta menor la suma de sus ángulos.

En principio, es evidente que depende de la definición de "recta" afirmar que una línea lo sea o no. Se ha encontrado conveniente, en las matemáticas, formular dicha definición sólo con referencia a la superficie particular que se considera.

Una manera de definir una línea recta consiste en decir que es la distancia más corta entre dos puntos. Por otra parte, todo el mundo sabe, por lo mucho que se ha hablado en tiempos recientes de las proezas aeronáuticas, que la ruta más corta entre dos puntos de la superficie terrestre puede cubrirse siguiendo el arco del círculo máximo que pasa por ellos. Felizmente, a través de cada dos puntos de la superficie de una esfera, pasa, en efecto, un círculo máximo.

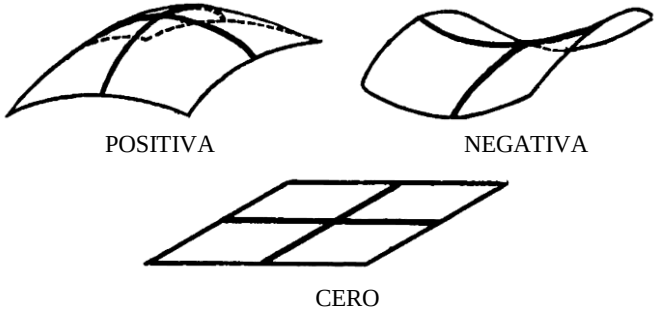


Fig. 48. Curvatura.

Luego, el círculo máximo sobre la esfera, corresponde a la línea recta en el plano —es la distancia más corta entre dos puntos de él. Pueden encontrarse curvas adaptables a otros tipos de superficies, por ejemplo, la seudoesfera o una superficie en forma de silla de montar, o galápago, que desempeñan el mismo papel. Generalizando esta noción puede afirmarse que una curva que sea la distancia más corta entre dos puntos (análoga a la línea recta en el plano) sobre *cualquier* clase de superficie, se denomina *geodésica* de esa superficie. Cuando buscábamos entidades que satisficieran la geometría de Lobachevski y la de Riemann, buscábamos en realidad superficies cuyas geodésicas obedecieran los postulados de las paralelas de estas geometrías.

En el plano, si adoptamos la hipótesis de Euclides, un par de geodésicas distintas se encuentran en un punto, a menos que sean paralelas, en cuyo caso no se cortan. Sobre una esfera, un par de geodésicas (arcos de círculos máximos), aun

siendo paralelas, siempre se cortan en dos puntos y, por lo tanto, la esfera obedece a la geometría de Riemann. Sobre una seudoesfera, que obedece a la geometría de Lobachevski, las geodésicas paralelas pueden aproximarse una a otra *asintóticamente*, pero nunca se cortan.

Las geodésicas de una superficie quedan determinadas por su *curvatura.* La curvatura no es fácil de explicar aunque todos nosotros tenemos una noción intuitiva de su significado. Un plano tiene curvatura nula. Una superficie como la de una esfera o un elipsoide es de curvatura positiva, mientras que de una superficie en forma de silla de montar o de la seudoesfera se dice que son de curvatura negativa Podemos imaginar superficies más complicadas, parte de las cuales pueden tener curvatura positiva, otras partes, negativa y finalmente, algunas otras partes de curvatura nula. Las geodésicas de una superficie, así como su geometría más adecuada, dependen de dicha curvatura, positiva, negativa o nula. De ahí que la geometría de una superficie de curvatura negativa constante es lobachevskiana, la de una superficie de curvatura positiva constante, es riemanniana y la de una superficie de curvatura nula, es euclidiana.

Todo cuanto se ha dicho acerca de la geometría no euclidiana si bien es bastante evidente cuando hablamos de *geometría*, tiende a tomarse confuso al querer aplicarlo a nuestra experiencia cotidiana. Estamos inclinados a compadecer a los habitantes de un mundo de dos dimensiones, tanto por su ignorancia como por sus limitaciones físicas. Ellos no pueden ni siquiera soñar en hacer cosas que para nosotros son perfectamente vulgares. Sin embargo, tendemos a mostrar las mismas limitaciones intelectuales para representarnos el mundo a nosotros mismos. En realidad, vamos más lejos porque deliberadamente rechazamos nuestra propia experiencia. Nuestra experiencia nos dice que el espacio es finito pero no acotado y que las líneas rectas que podemos trazar en la superficie sobre la cual vivimos nunca pueden ser realmente rectas, sino que deben ser curvas. (Por supuesto, ya que la curvatura de la

Tierra es distinta de cero.) Pero continuamos confundiendo infinito y no acotado, descartando este último que constituye nuestro verdadero conocimiento del espacio y admitiendo el primero por razones religiosas y estéticas. Y, aunque toda persona inteligente sabe que la superficie de la Tierra es curva y todo marino conoce la navegación sobre círculos máximos, la mayoría de nosotros se comporta como los Adventistas del Séptimo Día al razonar que nuestras líneas rectas están trazadas en un plano de curvatura nula —o, lo que es lo mismo, en un mundo plano. De aquí hay sólo un paso para creer que el quinto postulado de Euclides es sagrado y cualquier sustituto al mismo está "contra la naturaleza". Una pequeña curvatura, más aún que una instrucción reducida, tiene sus desventajas.

Aunque sabemos muchísimo más de la superficie que habitamos que acerca del espacio físico en que vivimos, resulta difícil elegir entre los absurdos de nuestras creencias acerca de una y otro. La geometría de Euclides, que considera superficies de curvatura nula, en el sentido más riguroso (haciendo caso omiso de la conveniencia en el cálculo) no se adapta a la superficie sobre la cual vivimos tan bien como la de Riemann. Evidentemente, nuestras geometrías, aunque sugeridas por nuestras percepciones sensoriales, no dependen de ellas.

Las geometrías que hemos tratado son sólo tres entre un infinito número de posibles. Cualquier geometría, sean cuales fueren sus postulados (siempre que no conduzcan a contradicciones), será tan "verdadera" como la geometría de Euclides. Para cada superficie, por compleja que sea su curvatura, hay siempre una geometría que la satisface particularmente. Es exacto que comenzamos nuestras geometrías como estructuras puramente lógicas, pero, así como en otras ramas de las matemáticas, descubrimos que la naturaleza se nos ha anticipado y que una superficie sirve, a menudo, a nuestra inventiva. Por esa razón, las matemáticas no euclidianas han encontrado campos de aplicación enormemente importantes en la intrincada física moderna.

Mientras que nosotros hemos considerado las aplicaciones de las geometrías no euclidianas de dos dimensiones a las

superficies usuales, los fisicomatemáticos estudian la aplicación de geometrías no euclidianas de más dimensiones a las variedades del espacio pluridimensionales. Al tratar de descubrir en qué clase de espacio vivimos realmente, los hombres de ciencia han obtenido resultados que los inducen a creer que el espacio es más bien curvado que recto. Habiéndonos liberado de la idea primitiva de que vivimos en una superficie *plana*, no sería tan difícil aceptar que el espacio es curvo.

Hay todavía un punto final: Si consideramos a las geometrías de Euclides, Lobachevski y Riemann como matemáticas aplicadas y no como puras y si preguntamos cuál de ellas es más apropiada para el espacio que nos rodea y para la superficie sobre la cual vivimos, ¿cuál deberá ser nuestra respuesta? Solamente el experimento y la medición pueden responder a esa pregunta. Se desprende que la geometría de Euclides es la más *conveniente* y la única, en consecuencia, que seguiremos usando para construir nuestros puentes, túneles, rascacielos y carreteras. Las geometrías de Lobachevski y de Riemann, tratadas adecuadamente, también servirían[69]. Nuestros rascacielos las admitirían (y otro tanto pasaría con nuestros puentes, túneles y carreteras), nuestros ingenieros quizá no. La geometría de Euclides es más fácil de enseñar, se ajusta más fácilmente con el extraviado sentido común, pero, por sobre todas las cosas, es más fácil de usar. Y, en esas cosas, después de todo, nos interesan más nuestras necesidades que la lógica.

Sin embargo, nuestros puntos de vista se han ampliado y nuestra visión es más clara. Las matemáticas nos han ayudado a superar aquellas impresiones sensoriales de las que ahora podemos decir: “nunca nos engañan, aunque mienten siempre”.

[69] Estas geometrías son indispensables en la física del átomo y de las estrellas, en regiones del espacio que no forman parte de nuestra experiencia inmediata.

V. PASATIEMPOS DE ÉPOCAS PASADAS Y RECIENTES

> El *trabajo consiste en todo lo que un cuerpo está obligado a hacer* y *el juego consiste en todo lo que un cuerpo no está obligado a hacer.*
>
> MARK TWAIN

Se ha dicho: "No es divirtiéndose como se aprende" [70], y en respuesta: *"Sólo* divirtiéndose uno puede aprender." Doquiera que esté la verdad, en algún lugar situado entre ambos extremos, es innegable que las recreaciones matemáticas son desafío a la imaginación y un poderoso estímulo a la actividad matemática. La teoría de ecuaciones, de la probabilidad, el cálculo, la teoría de los conjuntos de puntos, de la topología, etc., son todos frutos que se han desarrollado de semillas sembradas en el fértil suelo de la imaginación creadora, pues todas ellas han nacido de problemas planteados, en un principio, en forma de rompecabezas.

Los rompecabezas y las paradojas han sido populares desde la antigüedad y, entreteniéndose con estos juguetes, los hombres aguzaron su ingenio y estimularon su inventiva. Pero no fue únicamente por entretenimiento por lo que Kepler, Pascal, Fermat, Leibniz, Euler, Lagrange, Hamilton, Caley, y muchos otros, dedicaron tanto tiempo a los rompecabezas.

Las investigaciones en las matemáticas recreativas nacieron del mismo deseo de saber, fueron guiadas por los mismos principios y requirieron el ejercicio de las mismas facultades que las investigaciones que condujeron a los más profundos descubrimientos en las matemáticas y en la física matemática. En efecto, ninguna rama de la actividad intelectual es tema más a propósito para la discusión, que los rompecabezas y las paradojas.

---

[70] Anatole France, *Le crime de Silvestre Bonnard*.

El campo es enorme. Se han planteado rompecabezas desde la época de los egipcios y probablemente desde antes. Desde las expresiones secretas del oráculo de Delfos, pasando por la época de Carlomagno, hasta la edad de oro de los crucigramas, las paradojas y los rompecabezas, al igual que los seres de la Tierra, han asumido todos los tamaños y formas, y se han reproducido. Podemos examinar únicamente unas pocas de las especies que predominan, aquellas que han sobrevivido de una u otra manera y continúan prosperando en forma estilizada.

La mayoría de los famosos rompecabezas inventados antes del siglo XVII pueden hallarse en el primer gran libro sobre el particular titulado: *Les problémes plaisants et délectables, qui se font par les nombres* cuyo autor fue Claude-Gaspard Bachet, Sieur de Meziriac. Aunque apareció en 1612, es decir, dos años antes que la obra de Napier sobre los logaritmos, sigue siendo aún hoy un libro deleitable y un filón de informaciones. Desde entonces han aparecido muchas colecciones[71], que han aumentado el contenido del volumen de Bachet, ampliándolo a casi cinco veces su tamaño original.

Todo lo que esperamos poder hacer, es seguir el ilustre ejemplo de Mark Twain en un caso similar, en que trató de reducir todos los chistes a una docena de formas primitivas o elementales (suegra, hija del granjero, etc.). Intentaremos presentar algunos de los rompecabezas típicos que servirán de ejemplo con respecto a las ideas básicas comunes a todos

---

[71] W W R. Ball. *Mathematical Recreations and Essays.* 11 ª edición New York. Macmillan, 1939.
W Lietzmann, *Lustiges und Merkwürdiges uon Zahlen and Formen, Breslau.* Hirt. 1930.
Helen Abbot Merrill. *Mathematical Excursions,* Boston Bruce Humphries, 1934.
W Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele.* Leipzig B. G. Teubner. 1921. vols I y II.
H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics.* London: Thomas Nelson. 1919.
E. Lucas, *Récréations Mathématiques,* París. Gautier-Villars, 1883-1894. vols I, II, III y IV.

ellos. Limitaremos nuestro interés a los mismos y a algunos problemas, reservando para otro capítulo algunas de las más celebradas paradojas lógicas y matemáticas. Aunque no siempre pueda ser fácil establecer una distinción entre rompecabezas y paradoja, para nuestra finalidad es suficiente considerar aquéllos como un juego de ingenio o un problema, y a una paradoja, como una demostración o enunciado aparentemente engañoso y contradictorio.

A menudo los rompecabezas parecen difíciles porque no es fácil interpretarlos en términos precisos. Al intentar la solución de un problema, el método de tantear, a ver si atinamos, no sólo es más natural, sino generalmente más fácil que el ataque matemático. La experiencia diaria nos enseña que, frecuentemente, las ecuaciones algebraicas más formidables resultan más fáciles de resolver que algunos problemas formulados con palabras. Esos problemas deben traducirse primero en símbolos y luego, con estos símbolos, deben formarse ecuaciones para poder resolver el problema en sí.

Cuando Flaubert era muy joven escribió una carta a su hermana Caroline, diciéndole: "Ya que ahora estudias geometría y trigonometría, te propondré un problema. Un barco se hace a la mar desde el puerto de Boston, llevando un cargamento de lana. Desplaza 200 toneladas y tiene por destino el puerto de El Havre. Se rompe el palo mayor, el camarero está sobre cubierta, hay 12 pasajeros a bordo, el viento sopla en el cuadrante E.NE., el reloj señala las tres y cuarto de la tarde. Es el mes de mayo. ¿Qué edad tiene el capitán?" Flaubert no solamente bromeaba, sino que estaba expresando una queja compartida por ese respetable y numeroso grupo de personas "que no son fuertes en rompecabezas" y que consideran que la mayoría de éstos confunde y abruma con palabras superfluas[72]. Por esa razón los siguientes rompecabezas han sido

[72] Damos a continuación un ejemplo de un tipo de rompecabezas, muy de moda últimamente que, aunque aparentemente verboso, no contiene datos que no sean indispensables:

despojados de todos los elementos innecesarios a fin de presentar su estructura matemática fundamental. Entendemos por el término "estructura matemática" algo no expresado necesariamente por números, ángulos o líneas, sino la relación interna esencial entre los elementos componentes del rompecabezas. Porque, en el fondo, eso es todo lo que el análisis matemático puede revelar, todo lo que las matemáticas significan en sí.

Entre los problemas más antiguos están aquellos que se refieren a personas que, con una embarcación, efectúan travesías de una a otra orilla de un río en condiciones más bien difíciles. Alcuino, amigo de Carlomagno, sugirió un problema que desde entonces ha sido planteado y complicado de muchas maneras. Un viajero llega a la orilla de un río llevando como únicos bienes: un lobo, una cabra y un repollo. El único bote disponible es muy pequeño y no puede llevar más que al viajero y *uno* de sus bienes. Desgraciadamente, si los deja juntos, la cabra se comerá el repollo y el lobo devorará a la cabra. ¿Cómo transportará el viajero sus pertenencias a la otra orilla del río, manteniéndolas intactas?[73] Puede intentarse la

---

LOS ARTESANOS

Hay tres hombres. John, Jack y Joe, cada uno de los cuales tiene dos profesiones. Sus ocupaciones son las siguientes: chófer, contrabandista de licores, músico, pintor, jardinero y barbero.
En base a los siguientes hechos determínese el par de profesiones que corresponde a cada hombre:

1 El chófer ofendió al músico riéndose de su cabello largo.
2 El músico y el jardinero solían ir a pescar con John.
3 El pintor compró al contrabandista un litro de ginebra.
4 El chófer cortejaba a la hermana del pintor.
5 Jack debía $5 al jardinero.
6 Joe venció a Jack y al pintor jugando al tejo.

[73] Hay dos maneras de resolverlo cada una de las cuales se simboliza en la siguiente tabla:

L = lobo R = repollo
C = cabra → = cruce del río

solución con ayuda de una caja de fósforos, que represente al bote y cuatro tiras de papel que son sus ocupantes.

Una versión más complicada de este problema fue sugerida en el siglo XVI por Tartaglia. Tres hermosas desposadas, con sus celosos maridos, llegan también a un rio. El pequeño bote que deben tomar para efectuar el cruce sólo tiene cabida para dos personas. Para evitar cualquier situación comprometedora deben disponerse las travesías de tal manera que no se deje a ninguna mujer con un hombre, a menos que su esposo esté presente. Para ello se necesita once travesías; para dos parejas hacen falta cinco; mientras que con cuatro o más parejas sería imposible efectuar la travesía en las condiciones establecidas.

Análogos problemas se presentan en las maniobras ferroviarias. En la figura 50 hay una locomotora L y dos vagones, W_1 y W_2. La parte común de los rieles de los dos desvíos (DA) sobre los cuales están W_1 y W_2 es suficientemente larga como para contener a uno o a otro, pero no a ambos simultáneamente ni a la locomotora L. De este modo, un vehículo en DA puede ser desviado a cualquiera de los dos desvíos. La tarea del maquinista consiste en invertir las posiciones de W_1 y W_2. ¿Cómo puede hacerlo? Aunque este problema no presenta dificultades en particular, el mismo tema, en una forma más compleja, puede exigir del maquinista aptitudes matemáticas de un orden superior.

	PRIMERA SOLUCIÓN			SEGUNDA SOLUCIÓN		
1.	LCR			1. LCR		
2.	LR	C →	C	2. LR	C-→	C
3.	LR	←	C	3. LR	←	C
4.	R	L →	LC	4. L	R →	CR
5.	CR	← C	L	5. LC	← C	R
6.	C	→ R	LR	6. C	L →	LR
7.	C	←	LR	7. C	←	LR
8.		C →	LCR	8.	C →	LCR

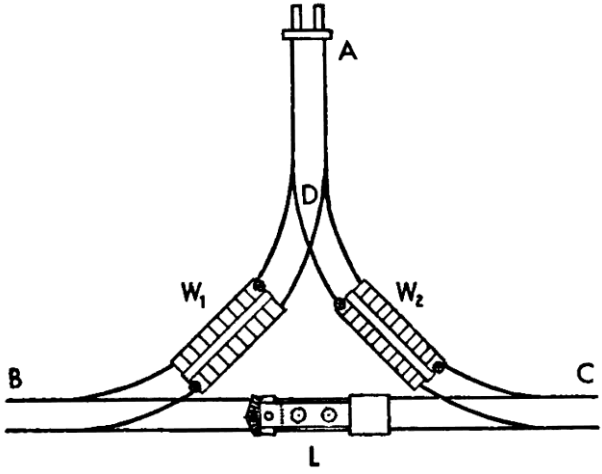


Fig. 50

La familia de Simeón Poisson trató de que éste fuese de todo, desde cirujano a abogado, esto último en la teoría de que no servía para nada mejor. Inició una o dos de estas profesiones con notable ineptitud, pero al fin encontró su oficio. Durante un viaje, alguien le planteó un problema análogo al que tratamos a continuación. Resolviéndolo al instante. Poisson descubrió su verdadera vocación y de ahí en adelante se dedicó por entero a las matemáticas, llegando a ser uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX [74].

Dos amigos que tienen una jarra con 8 litros de vino desean repartírselo en partes iguales. Disponen también de dos jarras vacías, una con capacidad igual a 5 litros y la otra,

[74] Al menos, así lo dice su biógrafo Arago No sólo la calidad de la obra de Poisson fue extraordinariamente elevada, sino que su producción fue enorme. Además de ocupar varios puestos oficiales de importancia, escribió más de 300 obras en una vida relativamente breve (1781-1840) "*La vie, c'est le travail*", era el lema de la casa de Poisson y, aunque parezca muy extraño, la solución de un rompecabezas lo condujo a una vida de incesante labor.

3. La figura demuestra cómo pudieron dividir en dos partes de cuatro cuartos cada una [75].

Fig. 51. Solución del problema de las 3 jarras.

[75] Llene la jarra de 5 litros con parte del contenido de la de 8 litros y vierta tres cuartos de la jarra de cinco litros en la de 3 litros. Eche luego los 3 litros en la jarra de 8 litros. Vierta los 2 litros restantes de la jarra de 5 litros en la de 3 litros Ya que hay 2 litros en la jarra de 3 litros, podremos llenar a ésta con 1 litro adicional. Vierta suficiente vino de la jarra de 3 litros a fin de llenar la de 3 litros. La jarra de 5 litros tendrá entonces 4 litros que quedarán en ella. Vierta ahora los 3 litros de la jarra de 3 litros en la de 8 litros Esto, sumado al litro que quedó en la misma, dará los 4 litros.

Esto nos recuerda otro "problema de verter líquidos", quizá no muy relacionado con el precedente, pero que constituye un buen ejercicio de rigor lógico y de refresco líquido.

EL ROMPECABEZAS DEL BEBEDOR INTERNACIONAL DE CERVEZA

En cierta ciudad situada en la frontera entre México y los EE.UU. de Norteamérica existe, en lo que se refiere al dinero en circulación, una situación peculiar. En México, un dólar norteamericano vale sólo 90 centavos de su moneda, mientras que en Estados Unidos el valor del peso mexicano es de sólo 90 centavos de dólar. Cierto día un vaquero entra en una cantina mexicana y pide diez centavos de cerveza, que paga con un peso mexicano, recibiendo de vuelta un dólar norteamericano que vale allí, precisamente, noventa centavos. Después de beber su cerveza, cruza la frontera y penetra en una taberna norteamericana donde pide lo mismo. Paga con un dólar norteamericano y recibe un billete de un peso mexicano de vuelta. Cruza nuevamente la frontera y repite el procedimiento, bebiendo alegremente cerveza todo el día y terminando tan rico como empezó, con un peso mexicano.

Se pregunta: ¿quién pagó la cerveza?

Moraleja: Visite el alegre país mexicano en sus vacaciones.

La naturaleza desconcertante de todo ardid aritmético radica, como ya lo hemos indicado, en su estructura, no en su contenido. Con un colador para separar las ideas esenciales, ocultas entre docenas de inútiles, todo hombre podría ser su propio mago. Nos viene a la memoria una inocente adivinanza, repetida frecuentemente entre los matemáticos: "¿Cómo podría uno cazar leones en el desierto?" se pregunta. Como hay tanta arena y tan pocos leones, sencillamente ¡tómese un colador, cuélese la arena y quedarán los leones! Luego se necesita semejante colador o tal vez un escalpelo, para poder llegar a lo esencial. Una vez eliminada la verbosidad, el es-

queleto del rompecabezas sucumbe ante la simple aritmética o el álgebra. Los juegos de salón consistentes en adivinar números que otros han elegido o naipes que alguien ha escogido, parecen casi maravillosos como ejemplos de "percepción extrasensorial". Pero después que hemos aprendido a separar los leones de la arena, enjaularlos es relativamente sencillo.

Los ardides hechos con naipes son habitualmente rompecabezas aritméticos disfrazados. Generalmente son tratables con el análisis matemático y no son, como se cree comúnmente, ejecutados por juegos de manos. Un principio importante, pasado por alto fácilmente, es que. "al cortar una baraja de naipes nunca se alteran las posiciones relativas de las cartas, a condición que, si es necesario, consideremos a la carta que queda en la parte superior, como siguiente inmediata de la que está en el fondo de la baraja'". Una vez que se ha comprendido esto, muchas tretas dejan de ser desconcertantes.

Siete jugadores de póquer se disponen a jugar con una nueva baraja De conformidad con la tradición, en la primera mano se cortan las cartas, no se mezclan. El tallador, fingiendo defraudar a sus compañeros, toma sus segunda y cuarta cartas del final de la baraja. Todos los presentes se dan cuenta de esta falta intencional. Sin embargo, cuando los demás jugadores recogen sus cartas no están dispuestos a exigir una nueva distribución, puesto que cada uno encuentra que tiene "full". Pero temerosos todavía de que el tallador se haya arreglado una mejor mano para sí, insisten en que descarte sus cinco naipes y tome los cinco primeros de la parte superior de la baraja. Fingiendo indignación, accede y gana con una runfla de cinco naipes del mismo palo. Pruébelo. De cien veces, noventa y nueve, usted logrará engañar a sus amigos, pero no podrá defraudar a un hombre honrado.

Frecuentemente, los ardides aritméticos de acertar un número elegido por otro dependen de la "base de numeración".

Cuando se expresa un número en el sistema denario, o decimal, como, por ejemplo. 3.976, lo que quiere decirse realmente es:

$$(3 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$$

La tabla[76] siguiente da algunos ejemplos más, de otros números escritos en base 10:

Entre la amplia variedad de problemas que surgen con el uso del sistema decimal, los siguientes son algunos de los más interesantes:

Un recurso útil para verificar la multiplicación, es el conocido con el nombre de "prueba del nueve".

Ejemplo		10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
469	=	9×10^0	+ 6×10^1	+ 4×10^2		
	=	9	+ 60	+ 400		
7.901	=	1×10^0	+ 0×10^1	+ 9×10^2	+ 7×10^3	
	=	1	+ 0	+ 900	+ 7.000	
30.000	=	0×10^0	+ 0×10^1	+ 0×10^2	+ 0×10^3	+ 3×10^4
	=	0	+ 0	+ 0	+ 0	+ 30.000
21.148	=	8×10^0	+ 4×10^1	+ 1×10^2	+ 1×10^3	+ 2×10^4
	=	8	+ 40	+ 100	+ 1.000	+ 20.000

Consideremos el producto $1.234\times5.678 = 7.006.652$. Sumemos los dígitos del multiplicando, del multiplicador y del producto, obteniendo así 10, 26 y 26, respectivamente. Como cada uno de estos números es mayor que 9, sumemos los dígitos de cada suma individual una vez más[77], obteniendo 1, 8 y 8. (Si después de la primera repetición queda una suma mayor de 9, deben sumarse los dígitos una vez más.) Ahora tomemos el producto de los números enteros correspondientes al multiplicando y al multiplicador, es decir 1×8, y comparémoslo con el número entero correspondiente a la suma de los dígitos del producto, que también es ocho. Como son iguales, el resultado de la multiplicación original seguramente es correcto.

[76] Se han sugerido otras bases Hay razones para creer que los babilonios emplearon la base 60 y en épocas más recientes se ha argumentado mucho en favor de la base 12.

[77] Así: $10 = 1 + 0 = 1$

$26 = 2 + 6 = 8$. etc.

Usando la misma regla comprobemos si el producto de 31.256 por 8.427 es 263.395.312. Nuevamente, las sumas de los dígitos del multiplicando, del multiplicador y del producto son, respectivamente: 17, 21 y 34, repitiendo la suma de estos dígitos obtenemos 8, 3 y 7. El producto de los dos primeros es 24, la suma de cuyos dígitos es 6. Pero la suma de las cifras del producto es 7. De este modo tenemos dos residuos diferentes, 6 y 7, y, en consecuencia, la multiplicación debe estar mal.

El siguiente ardid está estrechamente relacionado con la "prueba del nueve", lo cual pone en evidencia una notable propiedad común a todos los números.

Tomemos un número cualquiera y cambiemos el orden de sus dígitos, a voluntad, para formar otro número. La diferencia entre el primero y el segundo números es siempre divisible por 9 [78].

Otro tipo de problema que depende de la base de numeración decimal consiste en encontrar números que puedan obtenerse multiplicando sus retrógrados por números enteros. Entre tales números de 4 dígitos, 8.712 es igual a 4 veces 2.178 y 9.801 equivale a 9 veces 1.089.

La notación *binaría o* diádica (que emplea la base 2) no es un concepto nuevo, pues se encuentran referencias a la misma en un libro chino que se cree ha sido escrito, 3.000 años antes de Jesucristo. Cuarenta y seis siglos después descubrió nuevamente Leibniz las maravillas de la base binaria y se admiraba ante ella como si fuese una nueva invención, procediendo en forma semejante a aquel ciudadano del siglo XX que, cuando le mostraron por primera vez un reloj de sol, y le explicaron su funcionamiento, exclamó espantado: "¡Dios mío, lo que no inventan en estos tiempos...!" Por valerse de sólo dos símbolos Leibniz vio, en el sistema binario, algo de gran significación religiosa y mística: Dios podía estar representado por la unidad y la nada por el cero, y ya que Dios había creado todas las formas de la nada, cero y uno combi-

[78] Hall y Knight *Higher Algebra*.

nados podían representar al Universo entero. Ansioso de impartir esta joya de sabiduría a los paganos, Leibniz la comunicó al jesuita Grimaldi, presidente del Tribunal de Matemáticas en China, en la esperanza de que éste pudiera demostrar al emperador de ese país el error que cometía al seguir en el budismo, en vez de adoptar a un Dios capaz de crear el Universo de la nada.

Mientras que la notación decimal requiere de diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4... 9, la binaria usa solamente dos: 0 y 1. A continuación se indican los primeros 32 números enteros dados en la escala binaria:

Decimal		Binario	Decimal		Binario
1	=	1	17	=	10001
2	=	10	18	=	10010
3	=	11	19	=	10011
$4 = 2^2$	=	100	20	=	10100
5	=	101	21	=	10101
5	=	110	22	=	10110
7	=	111	23	=	10111
$8 = 2^3$	=	1000	24	=	11000
9	=	1001	25	=	11001
10	=	1010	26	=	11010
11	=	1011	27	=	11011
12	=	1100	28	=	11100
13	=	1101	29	=	11101
14	=	1110	30	=	11110
15	=	1111	31	=	11111
$16 = 2^4$	=	10000	$32 = 2^5$	=	100000

Ya que $2^0 = 1$ se verá fácilmente que *cualquier* número puede expresarse como la *suma* de potencias de 2, así como cualquier número en el sistema decimal puede ser expresado como la *suma* de potencia de 10. Por ejemplo, el número expresado en el sistema decimal como 25, se indica en el sistema binario usando sólo dos símbolos 1 y 0, resultando: 11001.

Decimal		Binario
25	=	11001
↕		↕
$(2\times10^1) + (5\times10^2)$		$(1\times2^4) + (1\times2^3) + (0\times2^2) + (0\times2^1) + (1\times2^0)$

Pero debido a que los números pueden escribirse más brevemente usando la escala decimal, resulta ésta más conveniente que la binaria, aunque en todo otro aspecto, esta última es tan exacta y eficiente como la otra. También las fracciones tienen su representación en la notación binaria. La fracción 1/3 por ejemplo, dada por el decimal periódico puro 0.33333..., se representa, en la notación binaria, por un binario periódico puro 0,01010101...[79]. El sistema binario de numeración ha adquirido importancia crucial con el advenimiento de los computadores electrónicos digitales. Resulta fácil fabricar dispositivos electrónicos de dos estados, capaces de efectuar operaciones aritméticas y lógicas. (En última instancia. estos dispositivos están compuestos por interruptores, que pueden estar abiertos y no conducir, estado 0, o cerrados. conduciendo, estado 1) Los dispositivos bi-estado permiten también traducir a circuitos las fórmulas de álgebra lógica booleana, y recíprocamente, posibilitan aplicar álgebra booleana al diseño y simplificación de circuitos. Todos los computadores digitales funcionan internamente en un sistema lógico-aritmético binario.

El sistema binario hace fácilmente comprensible la solución de problemas como los siguientes:

1. En muchas regiones de Rusia, los campesinos empleaban hasta hace poco lo que parece ser un método de multiplicación muy extraño. En esencia, el mismo sistema se usó en una época lejana en Alemania, Francia e Inglaterra y es similar a un método usado por los egipcios 2.000 años antes de la Era Cristiana.

Con un ejemplo lo explicamos mejor: Para multiplicar 45 por 64, se forman dos columnas. En el encabezamiento de una se pone 45 y en el de la otra 64. Se multiplica una de las columnas por 2 y se divide la otra entre el mismo número suce-

[79] Arnold Dresden. *An Invitation to Mathematics.* New York Henry Molt & Co 1936.

sivamente. Cuando se divide entre 2 a un número impar, se descarta el resto. El resultado será:

	Dividir	Multiplicar
	45	64
	22	128
(A)	11	256
	5	512
	2	1024
	1	2048

Tómense de la segunda columna aquellos números que aparecen frente a un número impar de la primera columna. Súmelos y obtendrá el producto deseado:

	45	64	64	$= 2^0 \times 64$
	22	128		$= 2^1 \times 64$
	11	256	256	$= 2^2 \times 64$
(B)	5	512	512	$= 2^3 \times 64$
	2	1024		$= 2^4 \times 64$
	1	2048	2048	$= 2^5 \times 64$
			2880	$= 45 \times 64$

Puede verse fácilmente la relación existente entre este método y el sistema binario, con sólo expresar a 45 con la notación binaria.

$45 = (1\times2^5) + (0\times2^4) + (1\times2^3) + (1\times2^2) + (0\times2^1) + (1\times2^0)$
$= 101101$
$= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1$

Por lo tanto:

$45 \times 64 = (2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0) \times 64$
$= (2^5\times64) + (2^3\times64) + (2^2\times64) + (2^0\times64)$

Ya que 2^4 y 2^1 no aparecen en la expresión binaria para 45, los productos $(2^4\times64)$ y $(2^1\times64)$ no están incluidos en los números que deben sumarse en (B). De este modo, lo que el campesino hace al multiplicar 45×64 es multiplicar 2^5, 2^3, 2^2, 2^0 sucesivamente, por 64, y luego tomar su suma.

II. Otro problema muy conocido, ya mencionado por Cardano, consiste en quitar un cierto número de anillos de una

varilla. Este rompecabezas puede analizarse mejor usando el sistema binario, aunque el manejo real de los anillos es siempre sumamente difícil.

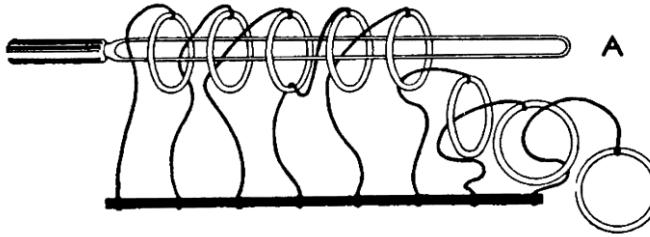


Fig. 52. El rompecabezas de los anillos chinos.

Los anillos están unidos de tal manera a la varilla, que si bien el de un extremo puede retirarse sin dificultad, cualquier otro anillo puede ponerse o quitarse solamente cuando el que le es contiguo en la dirección del extremo (A en la figura) está *sobre* la varilla y todos los demás están *fuera.* Así, para retirar el quinto anillo, el primero, segundo y tercero deben estar fuera de la varilla y el cuarto debe estar en ella. Si la posición de todos los anillos, dentro o fuera del bastidor, se escribe utilizando la notación binaria, de manera tal que 1 designe al anillo que está afuera y 0 al que está adentro, la determinación matemática del número de pasos requeridos para retirar un número determinado de anillos, no es muy difícil. La solución, sin recurrir a la notación binaria y a medida que aumenta el número de anillos, estaría mucho más allá del poder de imaginación de uno.

III. El problema de la Torre de Hanói tiene un principio análogo. El juego consiste en una tabla con tres clavijas, como indica la figura 53. En una de estas clavijas se coloca un número determinado de discos de varios tamaños, dispuestos de tal manera que el disco mayor quede abajo y los demás se superpongan por diámetros decrecientes, hasta llegar al disco más pequeño, que quedará en la parte superior. El problema consiste en traspasar todo el conjunto de discos a una de las otras dos clavijas, moviendo solamente un disco por vez y sin

que ninguno de ellos quede colocado sobre otro de menor diámetro. Si la acción de trasladar un disco de una clavija a otra constituye un traspaso, la tabla que va a continuación indica el número de traspasos que se requieren para distintas cantidades de discos, desde 1 hasta *n:*

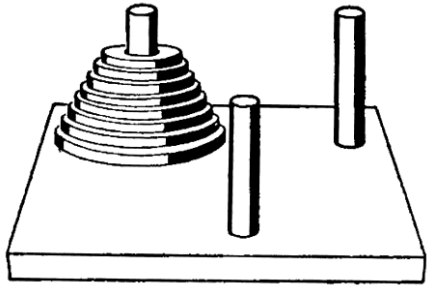


Fig. 53

TABLA PARA TRASPASOS [80]

Discos	Nº de traspasos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
…	…
n	$2^n - 1$

Existe una leyenda encantadora acerca de este juguete [81]:

> En el gran templo de Benarés, debajo de la cúpula que marca el centro del mundo, está colocada una placa de bronce, sobre la cual están fijadas tres agujas de diamante, cada una de las cuales tiene un codo de altura y su espesor es como el cuerpo de una abeja. En una de estas agujas, cuando se

[80] W Ahrens *op cit.*

[81] W. W. R Ball. *op cit*.

> creó el mundo. Dios colocó sesenta y cuatro discos de oro puro, el mayor de los cuales se apoya sobre la placa de bronce y los demás, por orden de tamaño decreciente, descansan sobre él. Esto constituye la torre de Brahma. Día y noche, incesantemente, los sacerdotes traspasan los discos de una de las agujas de diamante a la otra, de acuerdo a las leyes fijas e inmutables de Brahma, que exigen que el sacerdote mientras cumple su obligación, no debe mover más de un disco por vez y que lo debe colocar en una aguja de modo que no quede debajo de él ningún disco de menor diámetro. Cuando los sesenta y cuatro discos hayan sido traspasados de esta manera, de la aguja donde Dios los colocó, en la creación, a una de las otras dos agujas, torre, templo y brahmanes, por igual, se desmenuzarán en polvo y en medio de un fragoroso trueno, el mundo desaparecerá.

El número mínimo de traspasos que se requieren para cumplir la profecía es $2^{64}–1$, es decir: 18.446.744.073.709.551.615. Si los sacerdotes efectuasen un traspaso por segundo y trabajasen 24 horas diarias durante los 365 días del año[82], el cumplimiento de esa hazaña les exigiría: 58.454.204.609 siglos más escasamente seis años, suponiendo que no cometiesen ningún error —puesto que un pequeño desliz anularía todo su trabajo.

IV. Puede mencionarse otro juego relacionado con el sistema binario: el denominado Nim. En el mismo, dos personas juegan por turno, con cierto número de fichas colocadas en varios montones. En su tumo, un jugador retira de uno de los montones tantas fichas como le plazca. El jugador que toma la última ficha, pierde. Si se expresa en la base binaria el número de fichas de cada montón, el juego se presta fácilmente al análisis matemático. El jugador que pueda efectuar cierta distribución en el número de fichas de cada montón, puede ganar[83].

---

[82] Teniendo en cuenta los años bisiestos *(N del Ed.)*

[83] Véase Ahrens. op cit y Bouton. *Annals of Mathematics,* serie 2 vol. III (1901-1902), págs. 35-39, para la demostración matemática de Nim.

Es sumamente interesante destacar que el número 2^{64}, igual a 18.446.744.073.709.551.616, representado en el sistema binario por un número de 65 cifras, aparece en la solución de un problema relacionado con el origen del juego del ajedrez.

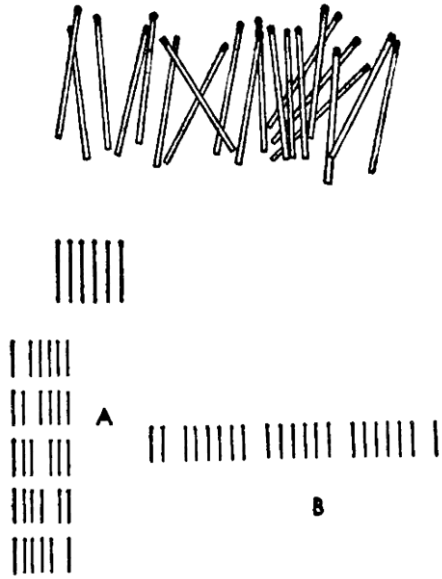


Fig. 54. Este diagrama da un ejemplo de cómo se gana una jugada de Nim. Supóngase que cada jugador, en su turno, debe retirar un fósforo como mínimo y cinco como máximo. La regla del juego estipula que el jugador que levanta el último fósforo pierde. Por ejemplo, imagínese que el montón original consiste en 21 fósforos. En ese caso, el que juega primero puede ganar dividiendo mentalmente los fósforos en grupos de 1, 6, 6, 6 y 2 (como se indica en *B).* Ya que juega primero levanta dos fósforos. Luego, por muchos que su contrario levante, el primer jugador toma el complemento de 6. Esto está indicado en *A*: Si el segundo jugador toma 1, el primero toma 5; si el segundo toma 2, el primer jugador toma 4 y así sucesivamente. Cada uno de los tres grupos de 6 se termina de esta manera y el segundo jugador queda con el último fósforo. Si hubiese habido, por ejemplo, 47 fósforos, el agrupamiento para que el primer jugador ganara, habría sido: 1, 6, 6, 6, 6, 6, 6 y 4. Pueden formularse fácilmente las reglas para cualquier otra variante de Nim.

De acuerdo a una vieja fábula, el rey hindú Shirham concedió una dádiva al Gran Visir Sissa Ben Dahir por haber inventado el ajedrez. Sabiendo que éste se juega sobre un tablero de 64 cuadrados, Sissa se dirigió al rey diciéndole: "Majestad, dadme un grano de trigo para colocar en el primer cuadrado, dos para colocar en el segundo, cuatro granos de trigo para colocar en el tercero y ocho para poner en el cuarto y así, ¡Oh, Rey!, dejadme cubrir cada uno de los 64 cuadrados del tablero." "¿Y, eso es todo lo que deseas, Sissa?", exclamó el rey estupefacto. "Oh, Señor", repuso Sissa "he pedido más trigo que el que hay en todo vuestro reino, más aún, más trigo que el que hay en todo el mundo, en verdad, suficiente para cubrir toda la superficie de la Tierra hasta una altura igual a la vigésima parte de un codo" [84].

Ahora bien, el número de granos de trigo que Sissa pedía es $2^{64}–1$, exactamente el mismo que el de los traspasos de discos que se requerían para cumplir la profecía de Benarés ya relatada.

Otra forma notable en la que aparece 2^{64} es al calcular el número de los antepasados de cada persona, desde el comienzo de la Era Cristiana —precisamente alrededor de 64 generaciones—. En ese lapso, suponiendo que cada persona tiene 2 padres, 4 abuelos, 8 bisabuelos, etc., excluyendo las uniones ilegítimas, cada persona tiene, por lo menos 2^{64} antepasados, o poco menos que diez y ocho y medio trillones de parientes. ¡Una reflexión de lo más desalentadora!

El problema de Josefo es uno de los más famosos y, sin duda, uno de los más antiguos. Generalmente narra la historia de cierto número de personas que iban a bordo de un barco, algunas de las cuales debían ser sacrificadas a fin de evitar que naufragara la embarcación. Según las distintas épocas en que se escribió la versión de este problema, los pasajeros eran cristianos y judíos, cristianos y turcos, holgazanes y estudiosos, negros y blancos, etc. Algún alma ingeniosa, con cono-

[84] La vigésima parte de un codo es aproximadamente una pulgada.

cimientos de matemáticas, siempre se arreglaba para proteger al grupo favorito. Para ello disponía a todos en un círculo y, contando desde determinado punto, progresivamente, cada *n*-ésima persona debía ser arrojada al mar, siendo n un número entero especificado. La disposición del círculo hecha por el matemático era tal, que tanto los cristianos como los escolares aplicados o los blancos —en otras palabras, el supuesto grupo superior— se salvaba, en tanto que el resto era arrojado al agua de acuerdo con la Regla de Oro.

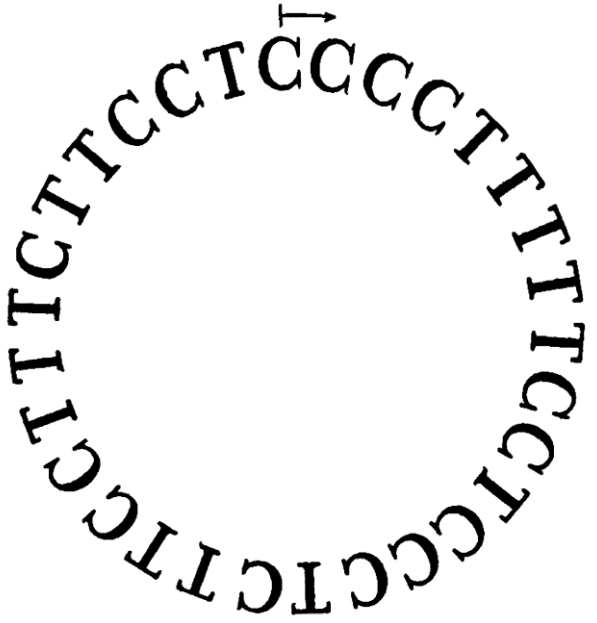


Fig. 55. C = Cristianos. T = Turcos.

En sus orígenes, esta fábula se atribuyó a Josefo, quien se encontró en una caverna con otros 40 judíos, resueltos a auto-exterminarse para escapar a una suerte peor si caían en manos de los romanos. Josefo decidió salvar su persona. Colocó a todos en círculo y convino con ellos en que cada tercera persona, contando alrededor, debía matarse. Colocándose él y

otra alma privilegiada en las posiciones 16 y 31 del círculo de 41, lograron salvarse, pues habiendo quedado al último pudieron eludir convenientemente el camino al martirio.

Una versión posterior de este problema, coloca a 15 turcos y a 15 cristianos a bordo de un barco, sorprendidos por una gran tormenta y que se hundirá a menos que la mitad de sus pasajeros, sean arrojados al mar. Después de colocarse formando un círculo, los cristianos propusieron, *ad majorem Dei gloriam,* que cada novena persona fuese sacrificada.

De este modo se libraron de todos los infieles y los verdaderos cristianos se salvaron[85].

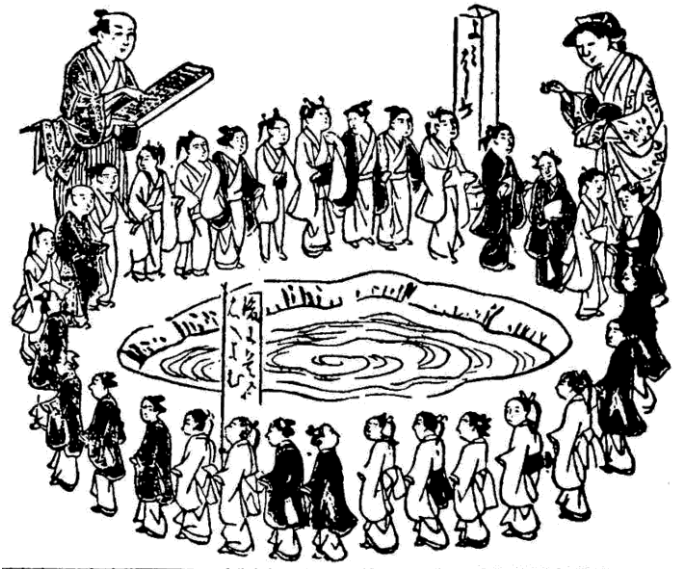


Fig. 56. El problema de Josefo, de la obra *Shojutsu* de Miyake Kenryu. (Tomado del libro *A History of Japanese Mathematics* de Smith y Mikami.)

[85] La regla general para resolver dichos problemas puede verse en P. G. Tait. *Collected Scientific Papers.* 1900.

Entre los japoneses, el problema de Josefo se presenta en otra forma: Treinta niños, 15 del primer matrimonio y 15 del segundo, se ponen de acuerdo en que la herencia de su padre es muy pequeña para ser dividida entre todos ellos. Entonces la segunda esposa propone que todos los niños se coloquen formando un círculo a fin de determinar los herederos de su esposo mediante un proceso de eliminación. Siendo una prudente matemática, así como una proverbialmente malvada madrastra, dispone los niños de tal manera que uno de los suyos resulte elegido. Una vez que se han eliminado 14 de los niños del primer matrimonio, el que queda, evidentemente matemático más astuto que su madrastra, propone comenzar de nuevo el recuento, pero en sentido contrario. Segura de las ventajas adquiridas y dispuesta, por lo tanto, a un rasgo de generosidad, ella accede, pero descubre, aterrada, que todos sus 15 hijos son eliminados, quedando solamente el del primer matrimonio que resulta entonces único heredero[86].

Soluciones matemáticas más completas de versiones más difíciles y generalizadas del problema de Josefo, fueron dadas por Euler, Schubert y Tait.

Ningún estudio sobre rompecabezas, por breve que sea, puede omitir la mención del más conocido entre los muchos que inventó Sam Loyd. "El rompecabezas del 15", "le Jeu de Taquín" son algunos de sus nombres. Durante varios años después de su aparición en 1878, este rompecabezas disfrutó de una popularidad, principalmente en Europa, mayor que la que hoy gozan el "rock" y el "bridge" juntos. En Alemania lo jugaban en las calles, en las fábricas, en los palacios reales y en el Reichstag. Los patronos se vieron obligados a colocar carteles prohibiendo a sus empleados jugar "El rompecabezas del 15" durante las horas de trabajo, so pena de multa o despido. Los electores, careciendo de dichos privilegios, tenían que resignarse a contemplar a sus representantes jugar al "15" en el Reichstag mientras Bismarck también lo jugaba. En Francia, el "Jeu de Taquín" se jugaba en los "boulevards" de

[86] Smith & Mikami. *A History of Japanese Mathematics*, *pag.83*.

París y en toda aldea insignificante desde los Pirineos hasta la Normandía. Según un periodista francés de la época, el "Jeu de Taquín" era un azote de la humanidad —peor que el tabaco y el alcohol— "y el origen de incalculables dolores de cabeza, neuralgias y neurosis".

Durante un tiempo, el "rompecabezas del 15" fue la locura de toda Europa. Se realizaron torneos y se ofrecieron premios fabulosos por la solución de problemas aparentemente sencillos. Pero lo raro fue que nadie pudo ganar alguno de estos premios y los problemas, aparentemente simples, quedaron sin resolverse.

El "rompecabezas del 15" (ver la siguiente fig.), consiste en una caja cuadrada, de madera o metal, poco profunda, que contiene 15 pequeños bloques cuadrados numerados del 1 al 15. En realidad hay lugar para 16 bloques, de manera que, habiendo solamente 15, los mismos pueden moverse e intercambiar sus posiciones. El número de posiciones concebibles es: 16! = 20.922.789.888.000. El problema consiste en efectuar un determinado arreglo de los bloques partiendo de una posición inicial dada, que frecuentemente es la denominada *normal* y que se indica en la figura 57.

Poco tiempo después de la invención de este rompecabezas, dos matemáticos norteamericanos[87] demostraron que, a partir de un orden inicial dado, sólo podían obtenerse realmente la *mitad* de todas las posiciones concebibles. De este modo, hay siempre aproximadamente diez billones de posiciones que el poseedor de un "rompecabezas del 15" puede realizar y otras tantas que no puede.

El hecho de existir posiciones imposibles permite comprender fácilmente el porqué de los tan generosos premios en efectivo ofrecidos por Loyd y otros, ya que los problemas para los cuales se ofrecían las recompensas, siempre implicaban posiciones imposibles. Y es doloroso pensar en las jaquecas, neuralgias y neurosis que podrían haberse evitado —sin contar los beneficios que ello hubiese deparado al Reichs-

[87] Johnson & Story, *American Journal of Mathematics.* vol 2 (1879)

tag— si *The American Journal of Mathematics* hubiese circulado tan ampliamente como el rompecabezas mismo. Con diez billones de soluciones posibles, habría quedado aún suficiente diversión para todos.

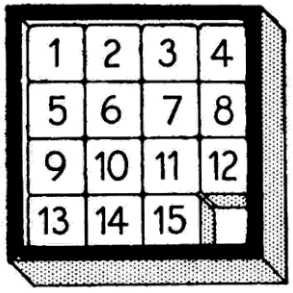


Fig. 57. El rompecabezas del 15 (también rompecabezas Boss o "Jeu de Taquin") en la posición normal.

En la posición normal (fig. 57), el espacio vacío está en la esquina inferior derecha. Cuando se realiza un análisis matemático del rompecabezas, es conveniente considerar que un cambio en el orden de los bloques no consiste en otra cosa que en mover el espacio vacío según una trayectoria especificada, asegurándose siempre que termine su recorrido en la esquina inferior derecha de la caja. A fin de que esto suceda, el espacio vacío debe recorrer el mismo número de casillas, tanto a la izquierda como a la derecha y a través del mismo número de casillas hacia arriba que hacia abajo. En otras palabras, *el espacio vacío debe moverse a través de un número par de casillas.* Si partiendo de la posición normal, puede obtenerse la que se desea obrando de acuerdo con este requisito, la posición es *posible*, en caso contrario es *imposible.*

Basándose en este principio, el método para determinar si una posición es posible o imposible, es muy sencillo. En la posición normal, cada bloque aparece en su correspondiente orden numérico, es decir, mirando las casillas, fila por fila, de izquierda a derecha, ningún número precede a otro menor que él. Para obtener una posición diferente de la normal, debe cambiarse el orden numérico de los bloques. Algunos núme-

ros, quizá todos, precederán a otros menores que ellos. Cada vez que un número precede a otro menor que él, se denomina una *inversión.* Por ejemplo, si el número 6 está delante de los números 2, 4 y 5, esto constituye una inversión a la que asignaremos el valor 3, por cuanto 6 precede a tres números menores que él. Si la suma de los valores de *todas las inversiones* en una posición dada es par, la posición es posible, es decir, puede obtenerse de la posición normal. Si la suma de los valores de las inversiones es impar, la posición es imposible y no puede obtenerse de la configuración normal.

La posición indicada en la figura 58 puede producirse partiendo de la posición normal ya que la suma de los valores de las inversiones es 6, un número par.

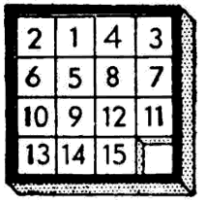


Fig. 58

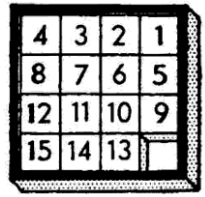


Fig. 59

Pero la posición que muestra la figura 59 es imposible, ya que, como se ve fácilmente, la suma del valor de las inversiones es impar.

Las figuras 60a, b y c, son ejemplos de otras tres posiciones. ¿Son ellas posibles o imposibles de obtener a partir del orden normal?

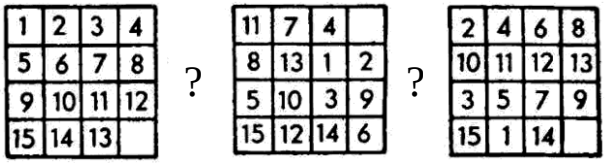


Fig. 60(a, b, c)

A principios de 1981 fue puesto a la venta en Europa y Estados Unidos el "cubo de Rubik", rompecabezas sumamente ingenioso, y de gran dificultad, semejante en ciertos aspec-

tos al rompecabezas de Loyd, particularmente, en la característica necesidad de sacrificar logros parciales para poder alcanzar otros mayores. Durante dos o tres años, el cubo de Rubik provocó una fiebre similar al "Jeu de Taquín". No obstante, y a pesar de haberse creado modelos reducidos, de bolsillo, no hay constancia de que se jugara en el Parlamento, mostrando los diputados manifiesta preferencia por la lectura de periódicos.

PROBLEMA DE LA ARAÑA Y DE LA MOSCA

La mayoría de nosotros hemos aprendido que una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. Al aplicar esta proposición a la Tierra sobre la cual vivimos, vemos que es, al mismo tiempo, inútil y falsa. Como ya hemos visto en el capítulo anterior, los matemáticos del siglo XIX, Riemann y Lobachevski, discernieron que esa proposición, si acaso es cierta, sólo puede aplicarse a superficies especiales. No tiene aplicación para una superficie *esférico* en la cual la distancia mínima entre dos puntos es el arco de un círculo máximo. Ya que la forma de la Tierra es aproximadamente la de una esfera, la menor distancia entre dos puntos, en cualquier lugar de la superficie terrestre, *nunca es* una línea recta, sino una porción del arco de un círculo máximo (ver cap. anterior).

Sin embargo, para todos los fines *prácticos,* aun en la superficie de la Tierra, la distancia más corta entre dos puntos está dada por una línea recta. Es decir, al medir distancias corrientes con una cinta métrica o una regla graduada, el principio enunciado es sustancialmente correcto. Sin embargo, para distancias que superan unos pocos centenares de metros, debe tenerse en cuenta la curvatura de la Tierra. Cuando se construyó recientemente en una gran fábrica de automóviles de Detroit una barra de acero de más de 600 pies de longitud (más de 180 metros), se vio que era imposible la medición exacta de su longitud sin tener en cuenta la curvatura de la Tierra. Ya hemos señalado que la determinación de una geodésica es muy difícil para superficies complicadas.

Pero podemos plantear un rompecabezas que nos demostrará cuán engañoso puede ser este problema, aun tratándose del caso más sencillo: la superficie plana.

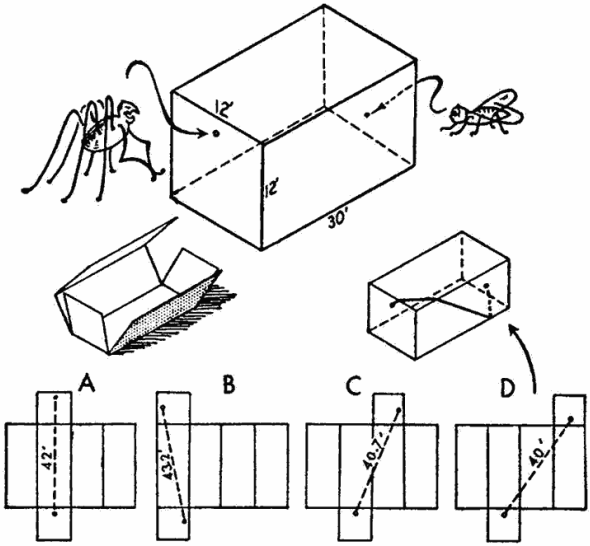


Fig. 61. Habiendo la mosca rechazado su cordial invitación, la araña se pone en marcha para almorzar siguiendo la ruta más corta posible. ¿Qué trayectoria representa la geodésica para la famélica araña?

En un cuarto de 30 pies de longitud, 12 de ancho y 12 de altura hay una araña en el centro de una de las paredes menores, a un pie del cielo raso y también hay una mosca en el medio de la pared opuesta, a un pie del piso. La araña tiene intenciones fáciles de concebir con respecto a la mosca. ¿Cuál es la ruta más corta posible según la cual la araña puede arrastrarse para alcanzar su presa? Si se pone en marcha en línea recta descendiendo por la pared, luego en línea recta a lo largo del piso y ascendiendo luego, también en línea recta, por la otra pared, o bien siguiendo una ruta análoga pasando por el cielo raso, la distancia a recorrer es de 42 pies. ¡Con toda seguridad que es imposible imaginar un recorrido menor! Sin embargo, recortando una hoja de papel, que cuando está

doblada convenientemente forma un modelo del cuarto (véase la fig. 61) y uniendo con una línea recta los puntos que representan a la araña y a la mosca, se obtiene una geodésica La longitud de esta geodésica es sólo de 40 pies, en otras palabras, dos pies más corta que la ruta "evidente" al seguir líneas rectas.

Hay varias maneras de recortar la hoja de papel y, de acuerdo a ellas, hay varias rutas posibles, pero la de 40 pies es la más corta y, lo que es más extraordinario, como puede verse en el corte D de la figura 61, este recorrido obliga a la araña a pasar por 5 de las 6 caras que forman el cuarto.

Este problema revela gráficamente el punto sobre el cual siempre insistimos —que nuestras nociones intuitivas acerca del espacio, nos conducen, casi invariablemente, por el mal camino.

PARENTESCOS

Ernesto Legouvé [88], el bien conocido dramaturgo francés, relata en sus memorias que, mientras se bañaba en la playa de Plombiéres, propuso a sus compañeros el siguiente problema: "¿Es posible que dos hombres, sin parentesco alguno entre sí, puedan tener la misma hermana?" "No, eso es imposible", dijo al instante un escribano. Un abogado que no se apresuró tanto a dar su respuesta, decidió, después de cierta deliberación, que el escritor tenía razón. Al punto, los demás convinieron rápidamente en que eso era imposible. "Pero es posible'', hizo notar Legouvé, "y nombraré a dichos hombres. Uno de ellos es Eugenio Sue y el otro soy yo". En medio de exclamaciones de asombro se le pidió que lo explicara; llamó al bañero pidiéndole una pizarra sobre la cual anotaba los nombres de los bañistas y escribió:

(~ significa casada con; | significa hijo de)

[88] Ahrens. *op cit*. vol. 2.

Sra. Sue ~ Sr. Sue	Sra. Sauvais ~ Sr. Sue	Sra. Sauvais ~ Sr. Legouvé
|	|	|
Eugenio Sue	Flora Sue	Ernesto Legouvé

"Como ustedes ven", concluyó, "es completamente posible que dos hombres tengan la misma hermana, sin estar emparentados entre sí".

La mayor parte de los rompecabezas que hasta aquí hemos tratado, han requerido cuatro pasos para su solución:

1. Separar los hechos esenciales.
2. Traducir estos hechos en símbolos adecuados.
3. Formar ecuaciones con estos símbolos.
4. Resolver las ecuaciones.

Para resolver los problemas de parentesco deben modificarse dos de estos pasos. Un simple diagrama reemplaza a la ecuación algebraica, y las deducciones que del mismo se hagan, reemplazan a la solución algebraica. Sin los símbolos y diagramas los problemas pueden resultar sumamente confusos.

Alexander MacFarlane, un matemático escocés, desarrolló un "álgebra de parentescos" que se publicó en las actas de la Real Sociedad de Edimburgo, pero los problemas a los cuales aplicó su cálculo podían resolverse fácilmente sin él. MacFarlane utilizó el muy conocido retintín:

> Ni hermanos y hermanas no tengo yo;
> pero el padre de este hombre es el hijo de mi padre

como cobayo para su cálculo, aunque el método de los diagramas da la solución mucho más rápidamente.

Un viejo cuento de hadas hindú crea una intrincada serie de parentescos que probablemente habrían puesto a prueba al álgebra de MacFarlane. Un rey, destronado por sus parientes, se vio obligado a huir con su esposa y su hija. Durante su fuga fueron atacados por salteadores y mientras se defendían el rey fue muerto, aunque su esposa y su hija se las ingeniaron para escapar. Pronto llegaron a un bosque en el cual el príncipe del vecino país y su hijo estaban cazando. El príncipe (que era viudo), y su hijo (soltero y buen partido) advirtieron las hue-

llas de la madre y la hija y decidieron seguirlas. El padre declaró que se casaría con la mujer de la huella más grande —indudablemente la de más edad— y el hijo afirmó otro tanto con respecto a la mujer de huellas más pequeñas y que, seguramente, era la menor. Pero al regresar al castillo el padre y su hijo descubrieron que el pie más pequeño era el de la madre y que el pie grande pertenecía a la hija. Sin embargo, sobreponiéndose a su desengaño, se casaron tal como lo habían planeado. Después de las bodas, tanto la madre, nuera de su hija, como la hija, suegra de su madre, tuvieron hijos e hijas. La tarea de desenmarañar los parentescos resultantes se la confiamos al lector, así como la explicación del siguiente verso hallado en una vieja lápida sepulcral de Alencourt, cerca de París:

> Aquí yace el hijo; aquí yace la madre;
> aquí yace la hija; aquí yace el padre;
> aquí yace la hermana; aquí yace el hermano;
> aquí yacen la esposa y el esposo; y a pesar de eso,
> aquí sólo hay tres personas.

En el famoso cuadro "Melancolía" de Albrecht Dürer, aparece un dibujo acerca del cual se ha escrito mucho más que sobre cualquier otro pasatiempo matemático. Dicho dibujo representa un *cuadrado mágico.*

Un cuadrado mágico consiste en una disposición de números enteros en un cuadrado que, al ser sumados en renglones, diagonales o columnas, dan el mismo resultado total.

Los cuadrados mágicos datan, por lo menos, de la época de los árabes. Grandes matemáticos como Euler y Carley descubrieron que eran entretenidos y dignos de ser estudiados. Benjamín Franklin admitió como disculpándose, que había invertido algún tiempo en su juventud en estas "bagatelas" —tiempo "que", se apresuraba a añadir, "lo podía haber empleado en algo más útil". Los matemáticos jamás han pretendido que los cuadrados mágicos fuesen algo más que entretenimientos, por mucho tiempo que hayan invertido en ellos, aunque el continuo estudio dedicado a esta forma de rompecabezas pueda haber arrojado alguna luz, incidental-

mente, sobre las relaciones entre los números. Su móvil principal es, todavía, místico y recreativo[89].

Existen otros rompecabezas de considerable interés, que aquí no discutimos porque los tratamos más extensamente en un lugar adecuado[90]. Entre éstos hay problemas relacionados

---

[89] Recientemente se ha encontrado, en la investigación agronómica, y más generalmente en el diseño de experimentos para análisis estadístico por el método de bloques equilibrados incompletos, una importante aplicación a los cuadrados mágicos Véase el capítulo 14 de *New Mathematical Diversions*, de Martin Gardner, del que hay edición española. "Nuevos pasatiempos matemáticos". Alianza Editorial. 1972

[90] Hay también rompecabezas, que aunque muy entretenidos y engañosos, no representan idea matemática alguna que no haya sido ya considerada, y, por lo tanto hemos prescindido de mencionarlos. Podemos, no obstante, dar tres ejemplos, elegidos por cuanto a menudo se les resuelve incorrectamente:

(a) Un vaso contiene vino hasta la mitad y otro vaso la misma cantidad de agua. Del primer vaso se saca una cucharadita de vino y se vierte en el vaso que contiene agua. De la *mezcla* se toma una cucharadita y se echa en el vaso de vino ¿Es ahora mayor o menor la cantidad de vino en el vaso de agua que la cantidad de agua en el vaso de vino? Para dar término a todas las discusiones: es la misma

(b) El siguiente rompecabezas agitó no hace mucho tiempo, a los delegados a una distinguida asamblea de expertos en problemas difíciles Un mono está colgado del extremo de una cuerda que pasa por una polea y está en equilibrio merced a una pesa atada en el otro extremo. El mono decide trepar por la cuerda ¿Qué sucede? Los astutos congresales se empeñaron en toda clase de vanas conjeturas y especulaciones que iban desde la duda de si el mono podía trepar por la cuerda, hasta rigurosas demostraciones matemáticas" de que no podía (Cedemos avergonzados, al impulso probablemente superfluo, de señalar la solución ¡la pesa sube igual que el mono!)

(c) Imaginemos tener una cuerda de 40.000 kilómetros de largo, longitud suficiente para poder rodear exactamente al globo terrestre por el ecuador. Tomemos la cuerda y adaptémosla ajustadamente a su alrededor, sobre océanos, desiertos y junglas Desgraciadamente, cuando hemos completado nuestra tarea descubrimos que al confeccionar la cuerda se ha cometido un ligero error, pues sobra 1 metro Para salvar el error decidimos unir los extremos de la cuerda y distribuir uniformemente ese metro en los 40.000 kilómetros. Naturalmente (nos imaginamos) nadie lo notará ¿A qué distancia le parece a usted que la cuerda quedará separada del suelo por el simple hecho de sobrarle 1 metro?

La respuesta correcta parece increíble, pues la cuerda quedará a 16 cm de la Tierra a todo lo largo de sus 40 000 km

Para que esto le resulte más razonable usted puede preguntarse: Caminando

con la teoría de la probabilidad, el coloreado de mapas y las superficies de una sola cara, como la banda de Moebius.

Queda solamente un extenso grupo de problemas, aquellos relacionados con la teoría de los números. La teoría moderna de los números, representada por una vasta literatura, atrae la atención de todo matemático serio. Es una rama del estudio, muchos de cuyos teoremas, aunque sumamente difíciles de demostrar, pueden enunciarse de manera sencilla y son fácilmente comprensibles por todos. Dichos teoremas son, por lo tanto, más ampliamente conocidos entre legos cultos que teoremas de mucha mayor importancia en otras ramas de las matemáticas, teoremas que requieren conocimientos técnicos para ser comprendidos. Cada libro referente a entretenimientos matemáticos está lleno de rompecabezas simples o ingeniosos, astutos o maravillosos, fáciles o difíciles, que se basan en el comportamiento y propiedades de los números. El espacio de que disponemos nos permite mencionar sólo uno o dos de estos teoremas significativos sobre los números, los cuales, a pesar de su profundidad, pueden entenderse fácilmente.

Desde que Euclides demostró[91] que la cantidad de números primos es infinita, los matemáticos han estado buscando una prueba para determinar si un número dado es o no primo. Pero no se ha encontrado una prueba aplicable a todos los números. Aunque es extraordinariamente curioso, hay razones para creer que ciertos matemáticos del siglo XVII, que dedicaron muchísimo tiempo a la teoría de los números, poseían medios para reconocer los números primos que nos son to-

---

alrededor de la superficie terrestre, ¿cuánto más recorre su cabeza que sus pies?

[91] La prueba dada por Euclides de que hay un número infinito de números primos, es una demostración elegante y concisa. Si *P* es un número primo cualquiera, siempre puede hallarse otro mayor que él, considerando *P*! + 1 Este nuevo número, evidentemente mayor que *P*, no es divisible entre *P* o cualquier número menor que *P* Hay sólo dos alternativas: (1) No es divisible en modo alguno. (2) Es divisible por un número primo situado entre P y *P*! + 1 Pero cualquiera de estas dos alternativas prueba la existencia de un número primo mayor que *P*. CDD

talmente desconocidos. El matemático francés Mersenne y su mucho más grande contemporáneo Fermat tenían un misterioso sistema para determinar los valores de *p*, para los cuales: 2^P-1 es un número primo. Aún no se ha determinado claramente hasta qué punto habían desarrollado su método, o en realidad, qué método emplearon exactamente. Por consiguiente, sigue siendo todavía un motivo de asombro que Fermat contestara, sin un momento de vacilación, a una carta en la que se le preguntaba si el número 100.895.598.169 era primo, que éste era el producto de 898.423 por 112.303 y que cada uno de estos números era primo[92]. Careciendo de una fórmula general para todos los números primos, un matemático invertiría años para dar una respuesta correcta.

Uno de los teoremas más interesantes sobre la teoría de los números es el de Goldbach, que expresa que todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos. Es fácil de comprender y existen todas las razones para creer que es cierto, pues no se ha encontrado todavía un número par que *no* sea la suma de dos números primos; sin embargo, nadie ha logrado hallar una demostración válida para todos los números pares.

Pero quizá la más famosa de todas esas proposiciones consideradas ciertas, pero jamás demostradas, sea el "Último teorema de Fermat". En el margen de su ejemplar de la Aritmética, de Diophanto, Fermat escribió: "Si *n* es un número mayor que 2, no hay números enteros, a, b, c, tales que: $a^n+b^n = c^n$. He hallado una demostración verdaderamente maravillosa, que no cabe en este margen." ¡Qué lástima! Suponiendo que Fermat tuviese realmente una demostración (y su talento matemático era de tan alto rango que, por cierto, es posible) habría evitado a las generaciones de matemáticos que lo siguieron interminables horas de labor si hubiese tenido lugar para escribirla en el margen. Casi todo gran matemático, después de Fermat, ha intentado una demostración, pero ninguno lo ha logrado.

[92] Ball, *op. cit.*

Se conocen muchos pares de números enteros, la suma de cuyos cuadrados es también un cuadrado, así:

$$3^2+4^2 = 5^2; \text{ o } 6^2+8^2 = 10^2$$

pero nunca se han hallado tres números enteros para los cuales la suma de los cubos de dos de ellos sea igual al cubo del tercero. El argumento de Fermat era que esto sería cierto para todos los números enteros cuando la potencia a la cual estaban elevados era mayor que 2. Mediante cálculos extensos, se ha demostrado que el teorema de Fermat es cierto para valores de *n* hasta 617 [93]. Pero Fermat dijo para *todo valor de n* mayor que 2. De todas sus grandes contribuciones a las matemáticas, el legado más famoso de Fermat es un rompecabezas que tres siglos de investigación matemática no han logrado resolver, y que muchos escépticos creen que el mismo Fermat jamás resolvió.

Con un poco de mala gana debemos despedimos de los rompecabezas. De mala gana, porque hemos alcanzado a ver sólo un resplandor fugaz de un tema rico y entretenido y porque los rompecabezas, en un sentido, mejor que ninguna otra rama simple de las matemáticas, reflejan su espíritu siempre juvenil, vigoroso, puro e investigador. Los rompecabezas están hechos de las cosas con que juega el matemático, no menos que el niño con sus juguetes, y sueña y se maravilla con ellos porque están hechos de las cosas y circunstancias del mundo en que vive.

---

[93] Es muy fácil demostrar que si el teorema de Fermat es verdadero para un exponente *n*. lo es también para todos los múltiplos de *n* Por consiguiente, la dificultad está en demostrar el teorema cuando *n* sea número primo o cuando n = 4 El caso n = 4 fue establecido por el propio Fermat En 1847, Kummer dio una condición suficiente para que un exponente primo cumpliera el teorema de Fermat, y supuso que existirían infinitos de tales números primos Todos los esfuerzos por demostrar que así es han fracasado. En 1978, las condiciones suficientes conocidas permitían asegurar que el teorema de Fermat es cierto para todos los exponentes primos menores que 125.000

VI. PARADOJAS PERDIDAS Y PARADOJAS RECUPERADAS

¡Cuán curioso es el comportamiento de la paradoja y cómo se mofa alegremente del sentido común!
W. S. GILBERT

Quizá la mayor de todas las paradojas es que haya paradojas en matemáticas. No nos sorprende descubrir contradicciones en las ciencias experimentales, las cuales periódicamente sufren cambios tan revolucionarios que, si hasta hace sólo muy poco tiempo nos creíamos descendientes de los dioses, hoy visitamos el zoológico con el mismo interés amistoso con que vamos a ver a parientes lejanos. Análogamente, la fundamental y remota distinción entre materia y energía desaparece, mientras la física relativista ha reducido a polvo nuestros conceptos tradicionales sobre el tiempo y el espacio. En realidad, el testamento de la ciencia está en un flujo tan continuo, que la herejía de ayer es el evangelio de hoy y el fundamento de mañana. Parafraseando a Hamlet —lo que una vez fue una paradoja, ya no lo es, pero puede nuevamente volver a serlo. Sin embargo, debido a que las matemáticas se basan en lo anterior, en lo más viejo, sin descartarlo, porque es la más conservadora de las ciencias, porque sus teoremas se deducen de postulados por los métodos de la lógica, a pesar de haber sufrido cambios revolucionarios, no sospechamos que sea una disciplina capaz de engendrar paradojas.

Sin embargo, hay tres tipos distintos de paradojas que se presentan en las matemáticas. Hay proposiciones contradictorias y absurdas, que surgen de razonamientos falaces. Hay teoremas que parecen raros e increíbles, pero que, siendo lógicamente inexpugnables deben ser aceptados aunque trasciendan los límites de la intuición y de la imaginación. La tercera y más importante de las clases, consiste en aquellas paradojas lógicas que se presentan relacionadas con la teoría

de conjuntos y que han tenido por resultado un examen de los fundamentos de las matemáticas. Estas paradojas lógicas han creado confusión y consternación entre los lógicos y los matemáticos y han dado lugar a problemas referentes a la naturaleza de las matemáticas y de la lógica que aún no han hallado una solución satisfactoria.

PARADOJAS EXTRAÑAS PERO EXACTAS

Esta sección se dedicará a proposiciones aparentemente contradictorias y absurdas, pero, sin embargo, ciertas[94]. Anteriormente examinamos las paradojas de Zenón. Casi todas ellas fueron explicadas por medio de series infinitas y de las matemáticas transfinitas de Cantor. Hay, sin embargo, otras, que implican movimiento, pero que a diferencia de las paradojas de Zenón no consisten en demostraciones lógicas de que el movimiento es imposible. No obstante ello, ilustran gráficamente cuán falsos pueden ser nuestros conceptos sobre el movimiento; cuán fácilmente, por ejemplo, uno puede ser engañado por la trayectoria de un objeto animado de movimiento.

En la figura 62 hay dos monedas idénticas. Si hacemos rodar la moneda de la izquierda a lo largo de la mitad de la circunferencia de la otra, siguiendo la trayectoria indicada por la flecha, podemos sospechar que en su posición final, al llegar al extremo de la derecha, aparece con la cabeza invertida y no en la posición inicial. Es decir, después de haber hecho girar la moneda a lo largo de una semicircunferencia (mitad de su circunferencia), la efigie que aparece en la cara

[94] Hablando rigurosamente, las proposiciones matemáticas no son ni verdaderas ni falsas: provienen simplemente de los axiomas y postulados que damos por sentados Si aceptamos estas premisas y empleamos argumentos legítimamente lógicos, obtenemos proposiciones legítimas. Los postulados no se caracterizan por ser verdaderos o falsos, simplemente convenimos en atenemos a ellos Pero hemos empleado la palabra *verdadero* sin ninguna de sus implicaciones filosóficas para referimos de una manera no ambigua a proposiciones lógicamente deducidas de axiomas comúnmente aceptadas.

de la moneda, que ha iniciado su movimiento desde una posición normal, debería quedar ahora invertida. Sin embargo, si llevamos a cabo la experiencia, veremos que la posición final será como la que se indica en la figura 62, tal como si la moneda hubiese girado una vuelta completa alrededor de sí misma.

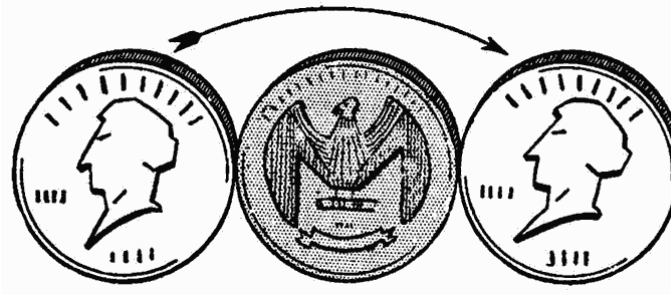


Fig. 62

El siguiente enigma es similar. El círculo de la figura 63 ha7 efectuado una rotación completa al rodar desde *A* hasta *B*. La distancia *AB* es, por lo tanto, igual a la longitud de la circunferencia del círculo. El círculo más pequeño, situado dentro del mayor, ha efectuado también una rotación completa recorriendo la distancia *CD*. Ya que la distancia *CD* es igual a la *AB* y cada distancia es aparentemente igual a la circunferencia del círculo que la ha desarrollado, nos hallamos ante el absurdo evidente de que la circunferencia del círculo más pequeño es igual a la circunferencia del círculo mayor.

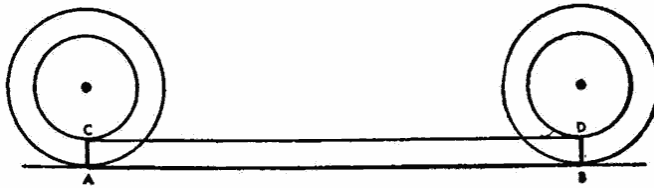


Fig. 63

A fin de explicar estas paradojas y varias otras de naturaleza similar, debemos dedicar nuestra atención, por un momento, a una curva famosa: la *cicloide* (véase fig. 64).

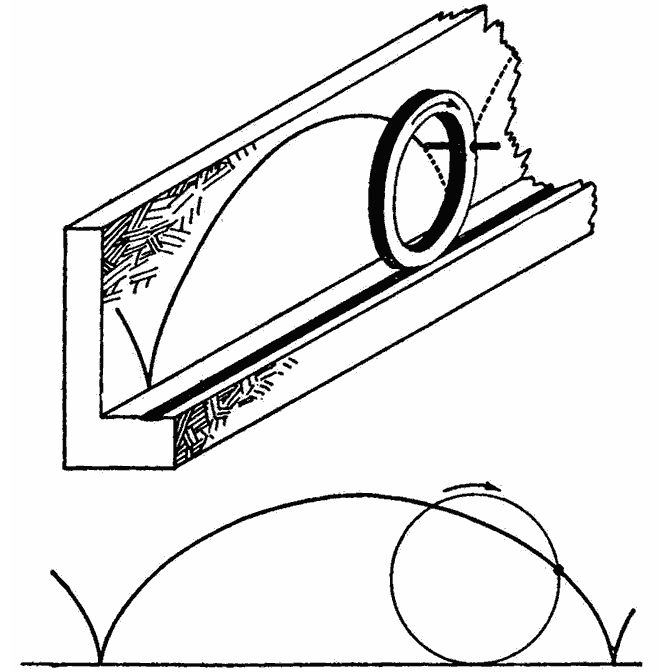


Fig. 64. La cicloide.

La cicloide es la curva descrita por un punto fijo de la circunferencia de una rueda que gira, sin resbalar, sobre una línea recta fija.

En la figura 65, cuando la rueda gira avanzando a lo largo de la recta *MN*, los puntos *A* y *B* describen una cicloide. Después que la rueda ha efectuado media rotación, el punto A_1 llega a A_3 y B_1 a B_3. A esta altura nada hay que indique que el punto *A* y el punto *B* no se hayan desplazado con la misma rapidez, ya que es evidente que han cubierto la misma distancia. Pero si examinamos los puntos intermedios A_1 y B_2, que

señalan las respectivas posiciones de *A* y *B* después de un *cuarto* de vuelta de la rueda, es claro que en el mismo tiempo, A se ha recorrido una mayor distancia que *B*. Esta diferencia queda compensada, pues en el segundo cuarto de vuelta, en el cual *B* va de B_2 a B_3, cubre la misma distancia que había recorrido *A*, moviéndose de A_2 a A_3; es evidente que la distancia sobre la curva entre B_2 y B_3 es igual en longitud a la distancia de A_1 a A_2. De ahí que, en una media rotación, tanto *A* como *B* han recorrido, exactamente, la misma distancia.

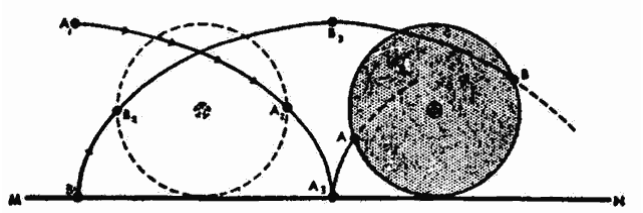


Fig. 65. Cuando la rueda se encuentra en la posición punteada, ha dado un cuarto de vuelta y el punto ha pasado de A_1 a A_2 en tanto que *B* sólo lo ha hecho de B_1 a B_2. El círculo sombreado indica que la rueda ha completado tres cuartos de vuelta.

Este extraño comportamiento de la cicloide explica el hecho de que, cuando una rueda está en movimiento, la parte más alejada del suelo, en cualquier instante, se mueve realmente, a lo largo y en horizontal, más rápidamente que la parte que se encuentra en contacto con el suelo.

Puede demostrarse que, a medida que el punto de una rueda, en contacto con el camino, se pone en movimiento, viaja más y más rápidamente, alcanzando su máxima rapidez horizontal cuando su posición es la más alejada del suelo.

Otra interesante propiedad de la cicloide fue descubierta por Galileo. Ya se indicó en el capítulo 31 que el área de un círculo sólo podía expresarse con ayuda de π, número trascendente. Como el valor numérico de π sólo puede calcularse aproximadamente (aunque con tanta aproximación como queramos, tomando tantos términos de la serie infinita como nos plazca), el área de un círculo puede también expresarse,

únicamente, como una aproximación. Lo notable es que, sin embargo, mediante la cicloide, podemos *construir* una superficie *exactamente* igual al área de un círculo dado. Basándose en el hecho de que la longitud de una cicloide, de extremo a extremo, es igual a cuatro veces la longitud del diámetro del círculo generador, puede demostrarse que el área comprendida por la cicloide entre los dos extremos y la línea recta que los une, es igual a tres veces el área del círculo. De donde se deduce que el espacio encerrado (sombreado en la fig. 66) a cada lado del círculo, que está en el centro, es *exactamente* igual a la superficie de dicho círculo.

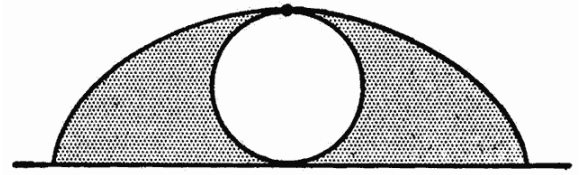


Fig. 66. Cuando el círculo rodante se encuentra en la posición indicada, las superficies sombreadas que quedan a cada uno de sus lados son exactamente iguales al área del círculo.

La paradoja que resulta de la seudodemostración de que la circunferencia del círculo pequeño es igual a la del círculo grande, puede explicarse con ayuda de otro miembro de la familia de la cicloide: la cicloide acortada [95] (fig. 67).

Fig. 67. La cicloide acortada está engendrada por el punto P, el cual pertenece al círculo pequeño, a medida que el círculo mayor rueda sobre la recta *MN*.

[95] Se conoce con el nombre de trocoides tanto a las cicloides alargadas como a las cicloides acortadas. *(N. del R.)*

Un punto interior de una rueda que gira, sin resbalar, sobre una línea recta, describe la cicloide acortada. De este modo, un punto situado en la circunferencia del círculo menor, concéntrico con otro mayor, engendrará esta curva. El círculo pequeño de la figura 63 efectúa sólo una rotación completa al moverse de *C* a *D* y un punto sobre la circunferencia de este círculo describirá una cicloide acortada. Sin embargo, comparando la cicloide acortada con la cicloide, observamos que el círculo pequeño no cubrirá la distancia *CD* efectuando simplemente una revolución al mismo tiempo que el grande. Parte de la distancia es cubierta por el círculo mientras está rodando, pero simultáneamente está siendo transportado hacia delante por el círculo grande cuando éste se mueve de *A* a *B*. Puede verse esto, aún más claramente, si consideramos el *centro* del círculo grande en la figura 63. El centro de un círculo, siendo un punto matemático y careciendo, por lo tanto, de dimensiones, no gira, sino que es transportado por la rueda en toda la distancia desde *A* hasta *B*.

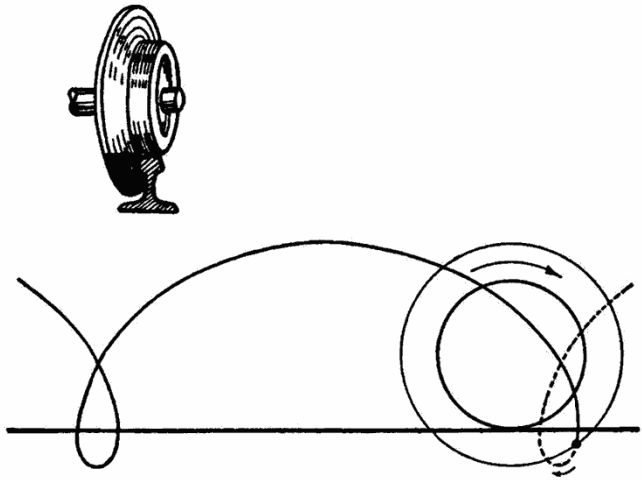


Fig. 68. La cicloide alargada. Un punto perteneciente a la pestaña de una rueda de ferrocarril, en movimiento, da origen a esta curva. La parte del tren que se mueve *hacia atrás* cuando el tren marcha hacia delante es la porción sombreada de la rueda.

Considerando los problemas que surgen al rodar una rueda sobre una línea recta, hemos estudiado la trayectoria de un punto situado sobre la circunferencia de la misma y vimos que esta trayectoria era una cicloide; al considerar la curva trazada por un punto del interior de la rueda, descubrimos la cicloide acortada. Además es interesante mencionar la trayectoria determinada por un punto situado *fuera* de la circunferencia, tal como un punto extremo de la pestaña de una rueda de vehículo ferroviario. Dicho punto no está en contacto con el riel sobre el cual gira la rueda y la curva que engendra es una cicloide alargada (fig. 68). Esta curva explica la curiosa paradoja de que, en cualquier instante, el tren nunca se mueve por completo en el sentido en que lo arrastra la máquina. ¡Hay siempre partes del tren que se mueven en el sentido opuesto!

Entre las innovaciones, en matemáticas, del primer cuarto de siglo, ninguna eclipsa en importancia al desarrollo de la teoría de los conjuntos de puntos y la teoría de las funciones de una variable real. Basándose totalmente en los nuevos métodos del análisis matemático, se logró un rigor y una generalidad en la geometría, mayores de lo que podría haberse imaginado si la ciencia se hubiese desarrollado enteramente por medios intuitivos. Se encontró que todos los conceptos geométricos convencionales podían ser definidos nuevamente con acrecentada exactitud, basándose en la teoría de los conjuntos y en los nuevos y poderosos instrumentos del análisis. En la geometría de la lámina de goma, como veremos más adelante, las curvas se definen de tal manera, que se elimina toda ingenua apelación a la intuición y a la experiencia. Una curva cerrada simple se define como un conjunto de puntos que posee la propiedad de dividir al plano exactamente en dos regiones, una *interior* y la otra *exterior*, donde las nociones *interior y exterior se* formulan con precisión, por métodos analíticos, sin hacer referencia alguna a nuestras nociones ordinarias de espacio. Precisamente por dichos medios se crearon e investigaron figuras mucho más complejas que las que hasta entonces se habían estudiado. En realidad, aunque la geometría analítica se limita a contornos que pueden des-

cribirse mediante ecuaciones algebraicas cuyas variables son las coordenadas de los puntos de la figura, el nuevo análisis hizo posible el estudio de formas que no *pueden* ser descritas por ecuación algebraica *alguna.* Algunas de éstas las encontraremos en la parte dedicada a curvas patológicas.

También se emprendieron estudios intensivos de ciertas clases de puntos —como los puntos en el espacio— y se examinó la noción de dimensión. En relación con este estudio, uno de los grandes éxitos de los últimos años ha sido el de asignar un número: 0, 1, 2 o 3, a cada configuración, para denotar su dimensión. Prevalecía la creencia de que ésta era una cuestión simple y evidente, que no requería análisis matemático y que podía resolverse intuitivamente. Así, podía decirse de un punto, que tenía dimensión nula, una recta o una curva: una dimensión, un plano o una superficie: dos dimensiones y un sólido: tres dimensiones. Debe admitirse que el problema de determinar si un objeto tiene 0, 1, 2 o 3 dimensiones no parece muy formidable. Sin embargo, una notable paradoja que fue descubierta es suficiente, en sí misma, para demostrar que no es así y que nuestras ideas intuitivas acerca de dimensión, así como sobre áreas, no sólo carecen de precisión, sino que a menudo son completamente engañosas.

La paradoja apareció al tratar de determinar si podía asignarse a cada figura del plano un único número (llamada medida) de manera tal que pudieran satisfacerse las tres condiciones siguientes:

1. Si se atribuye a la palabra "congruente" la misma acepción que se le dio en la geometría elemental[96], dos figuras congruentes deben tener la misma medida.
2. Si una figura fuese dividida en dos partes, la suma de las medidas asignadas a cada una de las dos partes debe ser

[96] Dos conjuntos de puntos (configuraciones) se dicen congruentes si, a cada par de puntos *P, Q* de un conjunto, corresponde unívocamente un par de puntos *P', Q'* del otro conjunto, tal que la distancia entre *P'* y *Q'* sea igual a la distancia entre *P* y *Q.*

exactamente igual a la medida asignada a la figura original.

3. Como modelo para determinar el método de asignar una medida a cada figura del plano, se acordó que debía asignarse la medida 1 al cuadrado cuyos lados tienen por longitud una unidad.

¿Qué es este concepto de medida? De acuerdo a lo anterior, parecería deducirse que la *medida* que se asigna a cada figura en el plano, no es otra cosa que el área de esa figura. En otras palabras, el problema consiste en determinar si el *área de toda figura* en el plano haciendo caso omiso de su complejidad, puede determinarse sin ambigüedad. Inútil señalar que fue propuesto como un ejercicio teórico y general y no como la enorme y evidentemente imposible empresa de medir realmente toda figura concebible. El problema podía considerarse resuelto si se diera una demostración teórica de que, a *toda figura*, podía serle asignada una única medida. Pero debe notarse que la finalidad principal era liberar a esta investigación de los conceptos tradicionales de la geometría clásica: la noción de área, entendida del modo antiguo, era desterrada y se excluían específicamente los métodos usuales para determinarla; la aproximación debía ser *analítica* (por medio de conjuntos de puntos) antes que geométrica. Cumpliendo tales restricciones se demostró que por complicada que sea una figura, y por mucho que su contorno se cruce y se vuelva a cruzar, puede asignársele una única medida.

Entonces vino el desastre, pues se descubrió el hecho sorprendente de que el mismo problema, al ser generalizado a superficies en el espacio, no sólo era insoluble, sino que conducía a las más graciosas paradojas. En efecto, los mismísimos métodos que habían sido tan fecundos en las investigaciones sobre el plano, cuando se aplicaban a la superficie de una esfera, eran inadecuados para determinar una medida única.

¿Significa esto realmente que el área de la superficie de una esfera no puede determinarse de una manera única? ¿No

da, acaso correctamente, el área de la superficie de una esfera la fórmula habitual, $4\pi r^2$? Desgraciadamente no podemos contestar estas preguntas en detalle, porque ello nos llevaría muy lejos y exigiría muchos conocimientos técnicos. Admitimos que el área de una superficie esférica, determinada por los viejos métodos clásicos, es $4\pi r^2$. Pero los viejos métodos carecían de generalidad, eran inadecuados para determinar la superficie de figuras complejas; además, ya advertimos que el concepto intuitivo de área debía omitirse deliberadamente en la tentativa de medida. Al mismo tiempo que el progreso en la teoría de las funciones y los nuevos métodos del análisis superaron algunas de estas dificultades, introdujeron también nuevos problemas estrechamente relacionados con el infinito; y como los matemáticos saben desde hace mucho tiempo, la presencia de ese concepto no constituye, en modo alguno, una bendición. Aunque ha permitido a los matemáticos realizar grandes adelantos, éstos han estado siempre a la sombra de la incertidumbre. Uno puede continuar empleando fórmulas tales como $4\pi r^2$ por la magnífica razón de que resuelven un problema, pero si se desea ir al mismo paso que el audaz e inquieto espíritu matemático, se ve obligado a hacer frente a las desalentadoras alternativas de abandonar la lógica para retener los conceptos clásicos, o la de aceptar los resultados paradójicos del nuevo análisis y hacer a un lado al sentido común práctico.

Las condiciones para asignar una medida a una superficie son análogas a las que se presentan cuando se trata de las figuras en el plano: 1) Debe asignarse una misma medida a superficies congruentes. 2) La suma de las medidas asignadas a cada una de las dos partes componentes de una superficie deberá ser igual a la medida asignada a la superficie original. 3) Si S indica toda la superficie de una esfera de radio r, la medida asignada a S deberá ser: $4\pi r^2$.

El matemático alemán Hausdorff demostró que este problema no tiene solución, que *no puede* asignarse una medida única a las partes de la superficie de una esfera de modo tal que se satisfagan las condiciones que anteceden. Demostró

que si la superficie de una esfera fuese dividida en tres partes separadas y distintas: *A*, *B*, *C*, de manera que *A* sea congruente con *B* y *B* sea congruente con *C* surge una extraña paradoja, que nos recuerda vívidamente algunas de las paradojas de la aritmética transfinita con las cuales está, en realidad, relacionada. Hausdorff demostró que no solamente *A* es congruente con *C* (como podía esperarse), *sino también* que *A es* congruente con *B*+*C*. ¿Cuáles son las complicaciones de este alarmante resultado?

Si se asigna una medida a *A*, a la misma medida debe asignarse a *B* y a *C*, ya que *A* es congruente con *B*, *B* con *C* y *A* con *C*. Pero, por otra parte, como *A* es congruente con *B* + *C*, la medida asignada a *A* tendría también que ser igual a la suma de las medidas asignadas a *B* y a *C*. Evidentemente dicha relación sólo podría cumplirse si las medidas asignadas a *A*, *B* y *C* fuesen todas iguales a 0. Pero eso es imposible por la condición 3), de acuerdo a la cual la suma de las medidas asignadas a las partes de la superficie de una esfera debe ser igual a $4\pi r^2$. ¿Cómo es posible entonces asignar una medida?

Desde un punto de vista ligeramente distinto, vemos que si *A*, *B* y *C* son congruentes entre sí y reunidas forman la superficie de toda la esfera, la medida de cualquiera de ellas debe ser la medida de un tercio de la superficie de toda la esfera. Pero si *A* es no solamente congruente con *B* y *C*, sino también con *B*+*C* (como lo demostró Hausdorff), la medida asignada a *A* y la medida asignada a *B*+*C*, deben ser, cada una, igual a la mitad de la superficie de la esfera. Así, de cualquier manera que lo encaremos, asignando medidas a porciones de la superficie de una esfera, nos enredamos en una contradicción sin remedio.

Dos distinguidos matemáticos polacos, Banach y Tarski, han hecho extensivas las deducciones del paradójico teorema de Hausdorff al espacio de tres dimensiones, con resultados tan sorprendentes e increíbles que no tienen igual en todas las matemáticas. Y las conclusiones, aunque rigurosas e intachables, son casi tan increíbles tanto para el matemático como para el lego.

Imaginemos dos cuerpos en el espacio de tres dimensiones: uno muy grande, como el Sol; el otro muy pequeño, como un guisante. Indiquemos el Sol con *S* y el guisante con *S'*. Recordemos ahora que nos estamos refiriendo, no a las superficies de estos dos objetos esféricos sino a la *totalidad de las esferas sólidas tanto del Sol como del guisante*. El teorema de Banach y Tarski afirma que puede llevarse a cabo, teóricamente, la siguiente operación:

Dividamos al Sol *S* en muchísimas partes pequeñas. Cada parte debe ser separada y distinta y el número total de partes será un número finito. Las mismas podrán designarse por s_1, s_2, s_3 ... s_n y, al ser reunidas, estas pequeñas partes formarán toda la esfera *S*. Análogamente *S'* —el guisante— debe dividirse en igual número de partes mutuamente excluyentes: s'_1, s'_2, s'_3, ... s'_n, que reunidas formarán el guisante. Luego, la proposición prosigue diciendo que si el Sol y el guisante han sido cortados de una manera tal que la pequeña porción s_1 del Sol sea congruente con la pequeña porción s'_1 del guisante, s_2 congruente con s'_2, s_3 congruente con s'_3, hasta s_n congruente con s'_n, este proceso acabará, no sólo con todas las pequeñas porciones del guisante, *sino también con todas las pequeñas porciones del Sol*.

En otras palabras, el Sol y el guisante pueden ser divididos en un número finito de partes desunidas de *manera que cada parte simple de uno sea congruente con una única parte del otro,* y *de tal modo que después que cada pequeña porción del guisante ha sido equiparada con una pequeña porción del Sol, no quede libre ninguna de éstas.*[97]

[97] Reconocemos aquí, por supuesto, que se trata de una simple correspondencia biunívoca entre los elementos de un conjunto que forman el Sol y los elementos de otro conjunto que constituyen el guisante La paradoja reside en el hecho de que cada elemento se equipara con otro que le es completamente congruente (a riesgo de repetir que congruente significa idéntico en tamaño y forma) y que hay bastantes elementos en el conjunto que forma el guisante como para equipararlos exactamente con los elementos que constituyen el Sol.

Para expresar esta gigantesca explosión de bomba en términos comparables al estallido de un pequeño cohete, diremos: Hay *una manera de dividir una esfera grande como el Sol, en partes separadas, de manera que no* haya *dos de esas partes que tengan puntos comunes* y, *sin comprimir ni deformar parte alguna, todo el Sol puede colocarse, cómodamente, en el bolsillo del chaleco.* Además, podrán disponerse de tal manera las partes componentes del guisante que, sin expansión ni deformación, no teniendo puntos comunes ningún par de sus partes, *llenarán sólidamente todo el Universo no quedando ningún espacio vacío,* ya *sea en el interior del guisante, o en el Universo.*

Ciertamente que ningún cuento de hadas, ninguna fantasía de las Mil y una noches, ningún sueño febril, puede competir con este teorema de inflexible y rigurosa lógica. Aunque los teoremas de Hausdorff, Banach y Tarski no pueden, actualmente, tener aplicación práctica alguna, ni aun para aquellos que esperan acomodar su voluminoso equipaje en un maletín de fin de semana, quedan como un magnífico desafío a la imaginación y como un tributo a la concepción matemática [98].

Se distinguen de las paradojas consideradas hasta ahora, aquellas que se refieren, más propiamente, a los sofismas matemáticos. Se presentan tanto en aritmética como en geometría y se les encuentra, a veces, aunque no muy a menudo, en las ramas superiores de las matemáticas como, por ejemplo, en el cálculo o en las series infinitas. Algunos sofismas matemáticos son demasiado triviales para merecer atención; sin embargo, el tema tiene derecho a que le dediquemos nuestra consideración porque, aparte de su aspecto entretenido, muestra cómo un encadenamiento de razonamientos matemáticos puede ser viciado totalmente por un solo paso en falso.

[98] En la versión que hemos dado en este capítulo de los teoremas de Hausdorff Banach y Tarski hemos hecho amplio uso de la brillante explicación dada por Karl Menger en su disertación: "¿Tiene solución la cuadratura del círculo?" que aparece en *Alte Probleme Neue Lösungen. Viena: Deuticke,* 1934

SOFISMAS ARITMÉTICOS

I. A casi todos nosotros nos resulta familiar una demostración según la cual 1 es igual a 2. Dicha prueba puede hacerse extensiva a la demostración de que dos números o expresiones *cualesquiera* son iguales. El error común a todas esas falacias consiste en dividir entre cero, operación estrictamente prohibida. Sabido es que las reglas fundamentales de la aritmética exigen que todo proceso aritmético (suma, resta, multiplicación, división, elevar a una potencia y obtener las raíces de un número) produzca un resultado único. Evidentemente este requisito es esencial, porque las operaciones de la aritmética tendrían poco valor o significado, si los resultados fuesen ambiguos. Si 1+1 fuese igual a 2 o a 3; si 4×7 fuese igual a 28 o a 82; si 7/2 fuese igual a 3 o a 3½, las matemáticas serían el Sombrerero Loco de las ciencias. Al igual que la buenaventura o la frenología serían asunto apropiado para explotar en una concesión de parque de atracciones.

Ya que los resultados de la operación de división deben ser únicos, la división entre cero *debe* ser excluida, por cuanto el resultado de esta operación es cualquier cosa que a usted se le ocurra. En general, la división está definida de tal modo que si a, b y c son tres números, $a/b = c$, *solamente cuando* $c \times b = a$. De acuerdo a esta definición, ¿cuál es el resultado de 5/0? No puede ser ningún número de cero a infinito, puesto que ningún número, al ser multiplicado por cero, es igual a 5. Por lo tanto, 5/0 no tiene sentido y más aún, 5/0 = 5/0 es una expresión que carece de significado.

Por supuesto que los sofismas resultantes de dividir por cero, rara vez se presentan de manera tan simple como para ser descubiertos a primera vista. El siguiente ejemplo nos da una idea de cómo surgen las paradojas cuando dividimos por una expresión cuyo valor es cero:

Supongamos que: $A+B = C$ y admitamos que $A = 3$ y $B = 2$.

Multipliquemos ambos miembros de la ecuación $A+B = C$ por $(A+B)$.

Obtenemos:

$$A^2+2AB+B^2 = C\,(A+B).$$

Cambiando el orden de los términos tenemos:

$$A^2+AB-AC = -AB-B^2+BC.$$

Al sacar factor común $(A+B-C)$, tenemos:

$$A\,(A+B-C) = -B\,(+A+B-C).$$

Dividiendo ambos miembros entre $(A+B-C)$, es decir, dividiendo entre cero, obtenemos: $A = -B$, o $A+B = 0$, que es evidentemente absurdo.

II. Al extraer raíces cuadradas, es necesario recordar la regla algebraica que dice que una raíz cuadrada de un número positivo es un valor negativo, y otra, un valor positivo. Así, las raíces cuadradas de 4 son –2 y +2 (lo cual puede escribirse $\sqrt{4} = \pm 2$) y las raíces cuadradas de 100, +10 y –10 (o sea, $\sqrt{100} = \pm\ 10$). El no observar esta regla puede dar lugar a la siguiente contradicción [99]:

(a) $(n+1)^2 = n^2+2n+1$

(b) $(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$

(c) Restando: $n\ (2n+1)$ de ambos miembros y sacando factor común, tenemos:

(d) $(n+1)^2 - (n+1)\ (2n+1) = n^2-n\ (2n+1)$

(e) Sumando: $1/4\ (2n+1)^2$ a ambos miembros de (d) se obtiene:

$$(n+l)^2 - (n+1)\,(2n+1) + 1/4\,(2n+l)^2 =$$
$$= n^2-n\,(2n+1) + 1/4\,(2n+l)^2,$$

que puede escribirse así:

(f) $[(n+1) - 1/2\ (2n+1)]^2 = [n-1/2\ (2n+1)]^2$.

[99] Lietzmann. Lustiges and Merkwürdiges von Zahlen und Formen. Breslau Ferd Hirt., 1930.

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros:

(g) $n+1 - 1/2\ (2n+1) = n - 1/2\ (2n+1)$

y, por lo tanto:

(h) $n = n+1$.

III. El lector podrá desenredar por su cuenta el siguiente sofisma aritmético [100]:

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ …verdadero

(2) $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)}$ …verdadero

(3) Por lo tanto $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{1}$; es decir, $-1 = 1$ …?

IV. Una paradoja que no puede resolverse con el empleo de matemáticas elementales es la siguiente: Supongamos que $\log (-1) = x$; en consecuencia, por la ley de los logaritmos:

$$log\ (-1)^2 = 2 \times log\ (-1) = 2x.$$

Pero, por otra parte, $\log (-1)^2 = \log (1)$ que es igual a 0. En consecuencia, $2x = 0$ y, $\log (-1) = 0$, que evidentemente no es cierto. La explicación reside en el hecho de que la función que representa el logaritmo de un número negativo, o complejo, no tiene un *solo valor*, sino *muchos valores.* Es decir, si fuésemos a construir la habitual tabla funcional para los logaritmos de los números negativos y de los complejos habría una *infinidad* de valores correspondientes a cada número [101].

V. El infinito, en matemáticas, es siempre indómito, a menos que se le trate correctamente. Ya vimos ejemplos de esto al desarrollar la teoría de los conjuntos y veremos más todavía cuando tratemos las paradojas lógicas. Consideramos oportuno citar a continuación un nuevo ejemplo al respecto.

[100] Ball. *óp. cit.*.

[101] Weismann, Einführung in das mathematische Denken. Viena. 1937.

Así como la aritmética transfinita tiene sus reglas propias que difieren de las de la aritmética finita, se requieren reglas especiales para operar con *series infinitas*. Si se las ignora o no se las observa, se originan contradicciones. Por ejemplo, consideremos la serie equivalente al logaritmo natural de 2:

$$log\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots$$

Si cambiamos el orden de los términos, como en la aritmética finita, obtenemos:

$$log\ 2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \ldots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \ldots\right)$$

De este modo:

$$\begin{aligned} log\ 2 = \left\{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \ldots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \ldots\right)\right\} \\ - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \ldots\right) \\ = \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\right\} \\ - \left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\right\} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto: log 2 = 0.

Por otra parte:

$$log\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots = 0{,}69315$$

según puede obtenerse de cualquier tabla de logaritmos.

Alterando el orden de los términos de una manera ligeramente distinta:

$$\begin{aligned} log\ 2 &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \ldots \\ &= \frac{3}{2} \times 0{,}69315 \end{aligned}$$

o, en otras palabras,

$$log\ 2 = \frac{3}{2} \times log\ 2$$

Una serie famosa, que preocupó a Leibniz, es la aparentemente sencilla: +1 – 1 + 1 – 1 + 1... A1 ordenar en distinta forma sus términos, se obtiene una variedad de resultados; por ejemplo: (1–1) + (1–1) + (1–1)... = 0, pero: 1 – (1–1) + (1–1)... = 1.

SOFISMAS GEOMÉTRICOS

Las ilusiones ópticas referentes a figuras geométricas explican muchos engaños y confusiones. Nos limitaremos a considerar sofismas no causados por limitaciones de nuestra fisiología [102], sino de errores en el raciocinio matemático. Una

[102] Las siguientes ilusiones ópticas, aunque no corresponden en realidad a un libro sobre matemáticas pueden ser de algún interés, al menos para la imaginación.

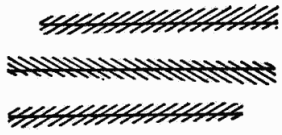


Fig. 71. ¿Son paralelas las tres rectas horizontales?

Fig. 72. Por supuesto que el cuadrado blanco es más grande que el negro. ¿O será más pequeño?

"demostración" geométrica muy conocida es la de que todo triángulo es isósceles. Supone que la bisectriz de un ángulo del triángulo y la recta mediatriz del lado opuesto a dicho ángulo, se cortan en un punto interior del triángulo.

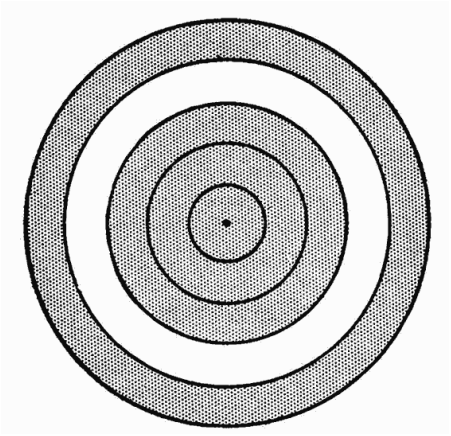


Fig. 73. Las dos regiones sombreadas tienen la misma área

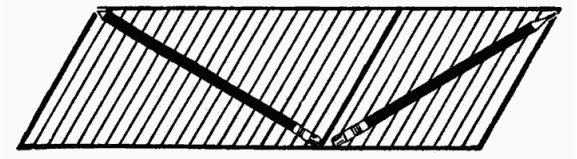


Fig. 74. ¿Cuál de los dos lápices es más largo? Mídalos y lo determinará.

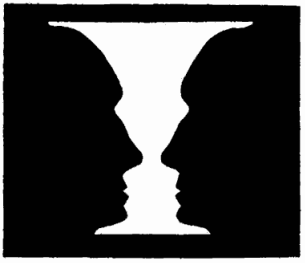


Fig. 75. ¿Qué ve usted? Ahora mire otra vez.

La siguiente es también una demostración falsa que expresa que un ángulo recto es igual a un ángulo mayor que un recto[103].

En la figura 69, *ABCD* es un rectángulo. Si *H* es el punto medio de *CB*, trácese por *H* una recta perpendicular a *CB*, la cual cortará a *DA* en *J* y será perpendicular a ella. Desde *A* trácese la recta *AE* exterior al rectángulo e igual a *AB* y *CD*. Únase *C* con *E* y sea *K* el punto medio de esta recta. Por *K* trácese una perpendicular a *CE*. Como *CB* y *CE* no son paralelas, las rectas que pasan por *H* y *K* se cortarán en un punto *O*. Únase *OA, OE, OB, OD* y *OC*. Se verá claramente que los triángulos *ODC* y *OAE* son iguales en todo. Ya que *KO* es la perpendicular que divide a *CE* en dos partes iguales, todo punto perteneciente a *KO* equidista de *C* y de *E*, *OC* es igual a *OE*. Análogamente *HO* es la recta perpendicular en el punto medio de *CB* y *DA*, *OD es igual* a *OA*.

Como *AE* es por construcción igual a *DC*, los tres lados del triángulo *ODC* son iguales, respectivamente, a los tres lados de triángulo *OAE*. En consecuencia, los dos triángulos son iguales y, por lo tanto, el ángulo *ODC* es igual al ángulo *OAE*. Pero el ángulo *ODA* es igual al ángulo *OAD*, porque el lado *AO* es igual a *OD* en el triángulo *OAD* y los ángulos adyacentes a la base en el triángulo isósceles son iguales. En consecuencia, el ángulo *JDC*, que es igual a la diferencia de *ODC* y *ODJ*, es igual a JAE que es la diferencia entre *OAE* y *OAJ*. Pero el ángulo *JDC* es recto mientras que el ángulo *JAE* es mayor que un ángulo recto y, por lo tanto, el resultado es contradictorio. ¿Puede usted encontrar el fallo? Le sugerimos dibujar la figura exactamente.

[103] Ball, *op. cit.*

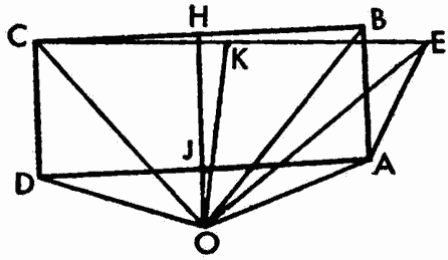


Fig. 69.

PARADOJAS LÓGICAS

Como los cuentos populares y las leyendas, las paradojas lógicas tuvieron sus precursores en tiempos remotos. Habiéndose ocupado de la filosofía y los fundamentos de la lógica, los griegos formularon algunos de los acertijos lógicos que, en épocas recientes, han vuelto a ser plaga de matemáticos y filósofos. Los sofistas crearon una verdadera especialidad en el arte de proponer preguntas o problemas difíciles, con los que dejaban perplejos y confundían a sus oponentes en los debates, aunque la mayor parte de ellos se basaban en pensamientos torpes y vicios dialécticos.

Aristóteles los destruyó al establecer los fundamentos de la lógica clásica, una ciencia que ha visto envejecer y que ha sobrevivido a todos los sistemas filosóficos de la antigüedad y que en casi todas sus partes es aún hoy perfectamente válida.

Pero hubo acertijos difíciles que resistieron porfiadamente todo intento de aclaración [104]. La mayor parte de ellos se origina en lo que se ha dado en llamar "la falacia de petición de principio" que es "debida al hecho de descuidar el principio fundamental de que lo que involucra al todo, en una totalidad dada, no puede, en sí mismo, ser parte de la totalidad" [105].

[104] Por ejemplo, la paradoja de Epiménides referente a los cretenses que dice que todos los nativos de la isla de Creta son mentirosos (V cap II.).

[105] Ramsay, Frank Plumpton. Artículos sobre "Matemáticas" y "Lógica". *Enciclopedia Britannica*, 13 ª edición.

Ejemplos sencillos de esto son aquellas frases pontificales, familiares a todo el mundo, que parecen tener muchísimo significado, pero que, en realidad no tienen ninguno, tales como: "nunca digas nunca", o "toda regla tiene excepciones" o "toda generalidad es falsa". Consideraremos algunas de las paradojas lógicas más desarrolladas, que implican el mismo sofisma básico y luego discutiremos su importancia desde el punto de vista matemático.

(A) Cazar en el vedado de un poderoso príncipe se castigaba con la muerte, pero el príncipe decidió posteriormente que aquel que fuera sorprendido cometiendo ese delito tendría el privilegio de elegir entre ser ahorcado o decapitado. Se permitía que el delincuente formulara una proposición — si era falsa, se le ahorcaba; si era verdadera, se le decapitaba. Un bribón, ducho en lógica, se valió de esa dudosa prerrogativa —ser ahorcado si no acertaba y ser decapitado si lo hacía— diciendo: "Seré ahorcado." Aquí se presentó un dilema imprevisto, puesto que el reo agregó: "Si ustedes me ahorcan ahora, infringen las leyes hechas por el príncipe, puesto que mi proposición es verdadera y debería, por lo tanto, ser decapitado; pero si ustedes me decapitan, también violan las leyes, porque entonces lo que yo dije era falso y debía, en consecuencia, ser ahorcado." Como en el relato de Frank Stockton, de la dama y el tigre, el final se lo dejamos a usted. Sin embargo, el delincuente probablemente no sufrió peor suerte en manos del verdugo que la que habría padecido en manos de un filósofo, porque hasta este siglo, los filósofos tuvieron poco tiempo para ocuparse en esas triviales adivinanzas — especialmente de aquellas que no podían resolver[106].

(B) El barbero de la aldea afeita a todos los hombres de la misma que no se afeitan a sí mismos. Pero este principio pronto lo complica en una situación dialéctica análoga a la del verdugo. ¿Se afeitará a sí mismo? Si lo hace, afeita a alguien

[106] Véase en EL QUIJOTE, capítulo LI, la paradoja del puente.

que se afeita a sí mismo y quiebra su propia regla. Si no lo hace, además de quedar con barba, también quiebra su regla al no afeitar a una persona de la aldea que no se afeita a sí misma.

(C) Fijémonos en que cada número entero puede expresarse, en idioma inglés, sin usar cifras. Así, (a) 1400 puede escribirse: "one thousand, four hundred" o (b) 1769823, como, "one million, seven hundred and sixty-nine thousand, eight hundred and twenty-three". Es evidente que ciertos números requieren más sílabas que otros; en general, cuanto mayor es un número, tantas más sílabas se necesitan para expresarlo. Así (a) requiere 6 sílabas, y (b) 21. Ahora bien, puede establecerse que ciertos números requerirán 19 sílabas o menos, mientras que otros necesitarán más de 19. Además no es difícil demostrar que entre aquellos números enteros que requieren exactamente 19 sílabas para ser nombrados en idioma inglés, debe haber uno que sea el más pequeño. Bien, "es fácil ver" [107] que *"the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables"* es una frase que debe denotar al número específico, 111777. Pero la expresión en cursiva que antecede es, en sí misma, un medio inequívoco de denotar al número entero más pequeño que se puede expresar en diecinueve sílabas en idioma inglés. Sin embargo, ¡la frase de referencia (en inglés) tiene sólo dieciocho sílabas! De este modo caemos en una contradicción, pues el menor número entero expresable en diecinueve sílabas puede expresarse con dieciocho sílabas[108].

[107] Esta expresión puede, quizá, ser tomada en el sentido con que Laplace la empleó. Cuando escribió su monumental *Mécanique Céleste* hizo abundante uso de la expresión "Es fácil ver" antepuesta siempre a alguna fórmula matemática a la que había llegado sólo después de meses de labor. El resultado fue que todos los hombres de ciencia que leían su obra, casi invariablemente reconocían en esta expresión una peligrosa señal de que allí había algo muy difícil para seguir adelante.

[108] A continuación damos un ejemplo equivalente en español:
(C) Consideremos el caso de que cada número entero se puede expresar, en español, sin el uso de símbolos. Así, (a) 1.400 se puede escribir: mil cuatro-

(D) La forma más sencilla de paradoja lógica que surge a raíz del uso indistinto de la palabra *todo*, puede verse en la figura 70.

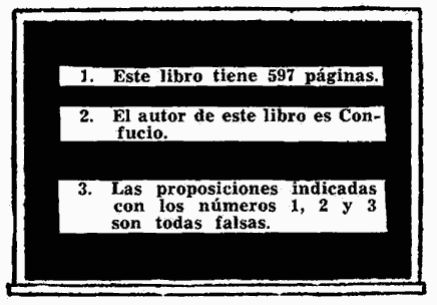


Fig. 70

¿Qué debe decirse de la proposición número 3? Las proposiciones 1 y 2 son falsas, pero la 3 puede ser tanto un lobo vestido de oveja como una oveja vestida de lobo. No es ni lo uno ni lo otro: Ni falsa ni verdadera.

Una forma más fina aparece en la famosa paradoja de Russell acerca de la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. Su argumento es algo escurridizo, pero recompensará la cuidadosa atención que se le preste.

---

cientos, o (b) 1.779.823, como un millón setecientos setenta y nueve mil ochocientos veintitrés. Es evidente que ciertos números requieren más sílabas que otros; en general, cuanto mayor es un número, tantas más sílabas se necesitan para expresarlo. Así. (a) requiere de 5 sílabas, y (b) 21. Ahora bien, puede establecerse que ciertos números requerirían de 21 sílabas o menos, mientras que otros necesitarán más de 21 Además no es difícil demostrar que entre aquellos números enteros que requieren exactamente de 21 sílabas para ser nombrados en español, debe haber uno que sea el más pequeño Bien, "es fácil ver" que *"el menor entero que se expresa con veintiún sílabas"*, es una frase que debe denotar al número específico 444.441. Pero la expresión en cursiva que antecede es, en sí misma, un medio inequívoco de denotar al número entero más pequeño que se puede expresar en veintiuna sílabas en español Sin embargo, la frase de referencia tiene sólo ¡dieciocho sílabas! Lo cual es una contradicción, pues el menor entero que expresamos en veintiún sílabas se puede expresar con dieciocho sílabas *(N del R)*.

(E) Usando la palabra clase en su acepción ordinaria podemos decir que hay clases formadas por mesas, libros, personas, números, funciones, ideas, etc. Por ejemplo, la clase de todos los presidentes de Estados Unidos tiene por miembros a todas las personas, vivas o difuntas, que hayan sido presidentes de Estados Unidos. Todo lo demás en el mundo, exceptuando la persona que haya sido o sea presidente de Estados Unidos, incluyendo el *concepto* de la clase misma, *no* es un miembro de esta clase. Luego éste es un ejemplo de una clase que no es parte (miembro) de sí misma. Asimismo, la clase de todos los miembros de la Gestapo, o sea la policía secreta[109], la cual contenía a algunos, ya que no a todos, de los truhanes que había en Alemania; o bien la clase de todas las figuras geométricas en un plano acotado por líneas rectas; o la clase de todos los números enteros desde 1 hasta 4.000 inclusive, tienen por miembros las cosas descritas, pero las clases no son miembros de sí mismas.

Ahora bien, si consideramos una clase como un *concepto*, la *clase de todos los conceptos* en el mundo es, en sí misma, un concepto y, de este modo, constituye una clase que es miembro de sí misma. Nuevamente, la clase de todas las ideas presentadas a la atención del lector de este libro es una clase que se contiene a sí misma como miembro, ya que al mencionar esta clase es una idea que traemos a la atención del lector. Teniendo presente esta distinción, podemos dividir a todas las clases en dos tipos: Aquellas que son parte de sí mismas y aquellas que *no* lo son. En realidad, podemos formar una clase compuesta de *todas aquellas clases que no* forman parte (miembros) de sí mismas (nótese el peligroso empleo de la palabra "todas"). La cuestión se presenta así: ¿Es esta clase (compuesta de aquellas clases que no son elemento de sí mismas) un miembro de sí misma o no? Tanto una contestación afirmativa como negativa nos enreda en una contradicción sin salida. Si la clase en cuestión *es* miembro de sí misma, no debería serlo por definición, pues sólo debería conte-

[109] Se refiere a la época de la Alemania nazi. *(N del R.)*

ner a aquellas clases que no son miembros de sí mismas. Pero si *no* es miembro de sí misma, debería serlo por la misma razón.

No nos cansaremos de insistir que las paradojas lógicas no son ardides inútiles o tontos. No fueron incluidos en este volumen para hacer reír al lector, aunque sólo fuese ante las limitaciones de la lógica. Las paradojas son como las fábulas de La Fontaine, que fueron ataviadas para asemejarse a cuentos inocentes sobre la zorra y las uvas, los guijarros y las ranas. Pues, al igual todos los conceptos éticos y morales fueron hábilmente bordados en su trama, del mismo modo, todo lo que hay de pensamiento lógico y matemático, filosófico y especulativo, está entretejido en estas pequeñas bromas.

Las matemáticas modernas al tratar de evitar las paradojas de la teoría de los conjuntos, se vieron enfrentadas a la alternativa de adoptar un escepticismo aniquilador con respecto a todo el razonamiento matemático, o de reconsiderar y reconstruir tanto los fundamentos de las matemáticas como los de la lógica. Debería ser claro que si las paradojas pueden surgir de un razonamiento aparentemente legítimo sobre la teoría de los conjuntos también pueden surgir en *cualquier otra parte* de las matemáticas. De este modo, aun si las matemáticas pudiesen reducirse a la lógica, como esperaban Frege y Russell, ¿a qué propósito servirían si la lógica misma era insegura? Al proponer su "Teoría de tipos" Whitehead y Russell, en *Principia Mathematica,* lograron evitar las contradicciones por medio de un recurso formal. Las proposiciones que eran *gramaticalmente* correctas, pero contradictorias, fueron declaradas desprovistas de sentido. Además, se formuló un principio que establece específicamente qué forma debe tomar una proposición para tener sentido; pero esto sólo resolvió a medias las dificultades, pues aunque las contradicciones podían ser reconocidas, los argumentos que conducían a las contradicciones no podían ser invalidados sin afectar ciertas partes aceptadas de las matemáticas. Para superar esta dificultad, Whitehead y Russell postularon el *axioma de reducibilidad,* que no tratamos aquí por ser demasiado técnico. Pero queda

en pie el hecho de que dicho axioma no es aceptable para la gran mayoría de los matemáticos y que las paradojas lógicas, después de haber dividido a los matemáticos en bandos inalterablemente opuestos, quedan aún por resolver [110].

Se ha insistido en que el matemático se esfuerza siempre por poner sus teoremas en la forma más general posible. A este respecto los fines perseguidos por el matemático y el lógico son idénticos —formular proposiciones y teoremas de la forma: si A es cierto, entonces B es cierto, donde A y B abarcan mucho más que coles y reyes. Pero si ésta constituye una elevada finalidad, es también peligrosa, lo mismo que el concepto de infinito. Cuando el matemático dice que tal y cual proposición aplicada a una cosa es cierta, esa proposición puede ser interesante e indudablemente es segura. Pero cuando trata de extender su proposición a *todo*, aunque es mucho más interesante, es también mucho más peligroso. En la transición de *uno* a *todo,* de lo particular a lo general, las matemáticas han realizado su mayor progreso y sufrido sus más serios reveses, entre los cuales, las paradojas lógicas forman la parte más importante. Porque si las matemáticas desean progresar sin riesgos y confiadamente, deben primero poner en orden sus asuntos en su propia casa.

[110] Como ya se señaló en el capítulo sobre el gúgol. hay adeptos a Russell que están satisfechos con la teoría de los tipos y el axioma de reducibilidad; hay intuicionistas, precedidos por Brouwer y Weyl, que rechazan el axioma citado y cuyo escepticismo sobre el infinito en las matemáticas los ha llevado hasta el punto de descartar muchas partes de las matemáticas modernas como sin sentidos, por estar imbricadas con el infinito; y hay formalistas, encabezados por Hilbert, quienes, si bien se oponen a las creencias de los intuicionistas, difieren considerablemente de Russell y la secuela logística. Hilbert considera a las matemáticas como un juego de reglas arbitrarias, comparable al ajedrez, y ha creado una concepción de matemáticas cuyo programa consiste en la discusión de este juego sin sentido y sus axiomas.

VII. AZAR Y PROBABILIDAD

Había una vez un mandril inteligente, que solía tocar el fagot, puesto que decía: "Me *parece que dentro de billones de años, lograré, ciertamente, dar con el tono. "*

SIR ARTHUR EDDINGTON

Holmes había estado sentado, durante algunas horas, en silencio, con su larga y estrecha espalda encorvada sobre una vasija química en la cual estaba mezclando un producto particularmente maloliente. Tenía la cabeza hundida sobre el pecho y visto desde donde yo lo contemplaba, parecía un pájaro extraño y descamado, con plumaje gris oscuro y un copete negro.

"¿De manera, Watson", dijo de pronto, "que no se propone usted invertir su dinero en acciones de minas de África del Sur?".

Di un salto de asombro. Aún acostumbrado como estaba a las curiosas facultades de Holmes, esta repentina intrusión en mis pensamientos más íntimos era completamente inexplicable.

"¿Cómo es posible que sepa usted eso?", le pregunté.

Hizo girar su sillón, sosteniendo en una mano un tubo de ensayo que emitía espesos vapores y, con un destello de alegría en sus ojos hundidos, se dirigió a mí en los siguientes términos:

"Ahora, Watson, confiese que ha quedado asombrado.

"Efectivamente.

"Debería hacerle firmar un papel en ese sentido.

"¿Por qué?

"Porque dentro de cinco minutos usted dirá que todo esto es absurdamente sencillo.

"Estoy seguro de que no diré nada parecido."

"Mire, mi querido Watson", dijo dejando su tubo de ensayo en el portatubos y comenzando a disertar con el aire de un profesor que se dirige a su clase: "No es en realidad difícil escalonar una serie de deducciones, cada una de las cuales depende de la que la precede y, que en sí misma, es sencilla. Si, después de proceder así, uno enlaza todas las deducciones centrales y presenta al auditorio el punto de partida y la conclusión, puede llegar a provocar alarma o, posiblemente, un efecto de mal gusto. Ahora bien, no era realmente difícil, pues me bastó observar el surco comprendido entre el índice y el pulgar de su mano izquierda para estar seguro de que usted no se propone invertir su pequeño capital en los campos auríferos."

"No veo relación alguna."

"Probablemente no, pero puedo demostrarle rápidamente que existe una relación muy estrecha. He aquí los eslabones perdidos del muy sencillo encadenamiento:

1. Usted tenía tiza entre el dedo índice y el pulgar de la mano izquierda cuando regresó del club anoche.
2. Usted se pone tiza allí cuando juega al billar a fin de asentar el taco.
3. Usted nunca juega al billar excepto con Thurston.
4. Usted me dijo, hace 4 semanas, que Thurston tenía un plazo para decidirse en alguna concesión sudafricana, que expiraría al cabo de un mes y en la que tenía deseos de hacerlo participar a usted.
5. Su libreta de cheques está dentro del cajón de mi escritorio y usted no me ha pedido la llave.
6. En consecuencia, usted no se propone invertir su dinero de ese modo."

"¡Pero eso es absurdamente sencillo!", dije.

"Completamente", me contestó un poco irritado. "Todo problema resulta infantil una vez que se lo han explicado..." [111]

[111] A Conan Doyle. *The Return of Sherlock Holmes.* «The Adventure ol the Dancing Men".

Este extracto, tomado de las aventuras de Mr. Sherlock Holmes, distinguido detective privado, es una excelente caricatura del *razonamiento por inferencia probable.* Tal método de razonamiento, aunque se parece al proceso formal del silogismo, tiene articulaciones más libres y está menos aprisionado en un sistema. Por consiguiente, se adapta mejor al pensamiento cotidiano.

Razonamientos del siguiente tipo[112]:

A. Ningún fósil puede reproducirse.
Una ostra puede reproducirse.
Luego, las ostras no son fósiles.

B. Ningún pato baila el vals.
Ningún oficial se niega a bailar el vals.
Todas mis aves de corral son patos.
Por lo tanto, mis aves no son oficiales.

tienen gran poder de convicción. Son claros, exactos y precisos y aseguran para nuestros pensamientos el máximo de validez formal. Al igual que en las matemáticas, se formulan ciertas suposiciones fundamentales y de ellas se deducen conclusiones. Pero la mayor parte de nuestros pensamientos no son matemáticos, la mayoría de nuestras creencias no son seguras, sino solamente probables. Como escribió Locke en una ocasión; "En la mayor parte de nuestra ansiedad, Dios nos ha deparado solamente el crepúsculo, como lo llamaría, de la Probabilidad, adaptable, presumo, a ese estado de Mediocridad y Noviciado en el que le plugo colocarnos aquí."

Es, pues, la relación de probabilidad y no la de certidumbre la que prevalece en la mayoría de nuestras premisas y conclusiones. Estamos *seguros* que una moneda caerá después de arrojarla al aire. Estamos igualmente seguros de que no puede retirarse una bolilla negra de una urna que sólo contiene bolillas blancas. Pero la mayoría de nuestras creencias son deficientes en certidumbre, aunque puedan fluctuar

[112] Cohén y Nagel. óp. *cit.*

desde muy inseguras hasta muy firmes. De este modo, estamos casi seguros que una moneda no caerá "cara" 100 veces seguidas. O podemos creer, sin mayor fundamento, que ganaremos el gran premio en las próximas carreras hípicas.

Quizá sea posible explicar esta actitud. Algunas cosas en el mundo suceden de conformidad con leyes naturales, las cuales (a menos que creamos en milagros) se cumplen inexorablemente. Así, debido a la fuerza de la gravedad, las monedas, al ser arrojadas en el aire, caerán. El Sol saldrá mañana porque los planetas siguen cursos regulares. Todos los hombres son mortales porque la muerte es una necesidad biológica —y así sucesivamente.

Pero acerca de la mayoría de los fenómenos que nos rodean sabemos muy poco. No conocemos ni las leyes a que obedecen, ni si en realidad obedecen a ley alguna. Los dados a hacer ver moralejas sobre las limitaciones humanas, no tendrían que ir más allá de algunos casos triviales para encontrar confirmaciones alarmantes. Podemos predecir los movimientos de planetas alejados a millones de kilómetros en el espacio, pero nadie puede pronosticar el resultado de arrojar una moneda o de tirar un par de dados. Acontecimientos de esta categoría y otros innumerables, los atribuimos a la casualidad. Pero la casualidad es simplemente un eufemismo para la ignorancia. Decir que un acontecimiento está determinado por la casualidad equivale a decir que no sabemos cómo está determinado. No obstante ello, aun dentro del dominio del azar, tenemos la sensación de cierta regularidad, de una cierta simetría —un orden dentro del desorden— y así, aun en tomo a acontecimientos que atribuimos a la casualidad, formamos varios grados de creencia racional. La teoría de la probabilidad considera lo que paradójicamente se denomina "las leyes del azar". Parte de su análisis crítico es una tentativa para formular reglas sobre *cuándo* y *cómo* pueden emplearse las matemáticas para medir la relación de probabilidad. Sin embargo, debemos aclarar el significado intrínseco de la probabilidad antes de que sea posible entrar a considerar sus reglas.

Aunque la mayor parte de nuestros juicios se basan más sobre la probabilidad de que sobre la certidumbre, rara vez se piensa cuidadosamente en la mecánica de este método de razonamiento. En el laboratorio, en los negocios, como jurados, o en la mesa de bridge, los juicios se forman por inferencia probable. Pocos tienen las facultades de un Sherlock Holmes o pueden presumir de tan afortunadas deducciones. Y sin embargo, en casi todo nuestro pensamiento cotidiano, nos vemos obligados a desempeñar el papel de detectives aficionados, lógicos y matemáticos.

Cuando está nublado y hace calor, decimos: *"Probablemente lloverá.*" El meteorólogo puede exigir mejores pruebas antes de aventurarse a formular una predicción. Necesitará conocer la presión barométrica, las isóbaras y las tablas de precipitación pluvial. Pero el hombre de la calle hace su predicción con mucho menos. El dinero ganado rápidamente y en forma abundante y misteriosa durante la vigencia de la ley seca era *probablemente* el fruto del contrabando de licores. El hombre que recibe unos pocos golpes con el pie debajo de la mesa de bridge deduce que *probablemente* está jugando mal, ya sea un hombre de negocios o de ciencia.

Y así razonamos sobre cuestiones que van de lo más trivial a lo más importante haciendo frecuente empleo de palabras y expresiones tales como: "probable", "la probabilidad es" o "los riesgos son", sin tener, no obstante, una idea precisa de lo que significa probabilidad. Y sin embargo, no es precisamente por falta de definiciones. En verdad que los hombres de ciencia prácticos han dejado, por lo común, la tarea de definir e interpretar la probabilidad a los filósofos, atentos quizás al aforismo galo que expresa que la ciencia está continuamente haciendo progresos porque nunca tiene certeza en sus resultados. Pero mientras los hombres de ciencia han quedado satisfechos con extender los usos de la probabilidad matemática y perfeccionar sus métodos, los filósofos y los matemáticos han intentado definirla.

Sobre la base de muchas opiniones y teorías contradictorias, han cristalizado tres interpretaciones principales.

El punto de vista subjetivo de la probabilidad, aunque ahora algo pasado de moda, en una época (especialmente en el siglo pasado) tuvo una posición muy respetable. Uno de sus principales defensores y comentadores fue Augustus de Morgan, el célebre lógico y matemático. Pensaba que la probabilidad se refería a un *estado de la mente*, al *grado* de certidumbre o de incertidumbre que caracteriza nuestras opiniones. Este punto de vista no es del todo erróneo; las principales dificultades que ocasiona surgen cuando intentamos justificar, sobre dichas bases, un cálculo de probabilidad.

Una proposición es verdadera o falsa[113], pero nuestro conocimiento es, para la mayor parte de las proposiciones, tan limitado que no podemos estar racionalmente seguros de su verdad o falsedad. Para formarnos una *creencia* racional debemos tener algún conocimiento sobre el particular. A veces dicho conocimiento puede ser suficiente para justificar nuestra certidumbre de que la proposición es verdadera o falsa. Así, por ejemplo, estamos seguros de que Sócrates no era ciudadano norteamericano e igualmente estamos seguros de que Hitler debió haber seguido siendo un pintor de casas. Por otra parte, entre los extremos de la certidumbre, hay una gama de opiniones que corresponden al grado de nuestros conocimientos.

En un sentido, es indudablemente cierto que nuestras opiniones racionales son subjetivas. A pesar de eso, si estamos convencidos de la verdad o falsedad objetiva de todas las proposiciones, no podemos, si es que queremos ser racionales, dejarnos guiar por la sola intensidad de la creencia. Como principio, las conclusiones imperfectas basadas en conocimientos limitados y razonamientos correctos, son infinitamente preferibles a los resultados correctos obtenidos por

[113] También podría ser que ciertas estructuras de oraciones que *parecen* proposiciones no son ni verdaderas ni falsas, sino sin sentido Hay, por ejemplo, funciones proporcionales tales como "*x* es una *y*" o proposiciones que carecen totalmente de sentido como "Un snark es un boojum". Pero ninguno de estos dos tipos nos interesa aquí.

razonamientos defectuosos. Es únicamente así como nos aproximamos, débilmente, a la vida de la razón.

Además, creemos que si la noción de probabilidad es tratada matemáticamente, debe proporcionamos un mejor material para medir, más adecuado que la simple fuerza de la creencia. En la mayor parte de los casos no puede asignarse una magnitud numérica a la relación de probabilidad; sin embargo, la probabilidad sólo puede ser considerada por el matemático cuando es medible y contable. Si la probabilidad debe servir para describir ciertos aspectos del mundo mediante fracciones, debe ser expresable como un número. Cuando una cosa no puede suceder, su probabilidad es 0; si es indudable que ocurrirá, su probabilidad es 1. Toda probabilidad comprendida entre estos extremos puede expresarse como una fracción que varía entre 0 y 1. Pero formar estas fracciones implica medición y recuento; ¿y de qué dispone el matemático para medir la "intensidad de una creencia"? Éste es un problema para el psicólogo. Aun cuando pudiera inventarse un instrumento para medir la intensidad de las opiniones, su valor sería poco mayor que el del detector de mentiras, esa joya de la jurisprudencia. Las personas difieren mucho en sus pareceres sobre el mismo conjunto de hechos. Lo que para un hombre es perfectamente evidente, para otro no resulta de manera alguna convincente; y nuestras opiniones, a menudo vagamente concebidas y relacionadas sin cohesión alguna, están demasiado vinculadas a nuestras emociones y prejuicios como para considerarlas aisladamente.

Una de las dificultades que surgen del punto de vista subjetivo de la probabilidad, resulta del *principio de razón insuficiente*. Este principio, que constituye la base lógica sobre la cual debe asentarse el cálculo de probabilidades desde el punto de vista subjetivo, sostiene que, *si ignoramos completamente los diferentes modos en que puede ocurrir un suceso* y *no tenemos, por lo tanto, ninguna base razonable de preferencia, es tan probable que ese suceso ocurra de una manera como de otra.* Desde que por vez primera este principio fue enunciado por Jacques Bernoulli, ha sido detenidamente ana-

lizado por los matemáticos. Como el principio se basa sobre la ignorancia, parecería deducirse que el cálculo de la probabilidad será más efectivo cuando lo usen aquellos que tengan una "ignorancia igualmente equilibrada". Por mucho que los hombres se aproximen a este ideal, los filósofos y los matemáticos se tienen en más alta estima y, así, el principio ha caído en desuso.

Sin embargo, contiene un elemento de verdad y no puede desarrollarse ningún cálculo de probabilidad compatible, sin depender de él en cierto modo. Principalmente, tiene valor como criterio negativo en el sentido de que no puede decirse que dos acontecimientos son igualmente probables si hay fundamentos para preferir uno al otro.

Cuando se usa sin gran cautela, el principio de razón insuficiente da lugar a contradicciones. Dos ejemplos: Tómese el caso de un mono al que se le da una cantidad de tarjetas, cada una de las cuales lleva impresa una palabra. ¿Es igualmente probable que, de cualquier manera que las ordene, producirá o no una frase con sentido? Esto, aunque evidentemente absurdo, es lo que parecería deducirse del principio de razón insuficiente. Del mismo modo, no teniendo evidencia de si Marte está habitado o no. podríamos llegar a la conclusión de que la probabilidad de que esté *exclusivamente* habitado por nazis es ½, y podríamos asimismo concluir que la probabilidad de cada una de las proposiciones: "Marte está exclusivamente habitado por necios" y "Marte está exclusivamente habitado por hormigas blancas" es también ½. Pero esto nos pone frente al caso imposible de *tres alternativas que se excluyen*, todas tan probables así como no probables [114].

[114] La siguiente paradoja, que surge del principio de razón suficiente, es citada por Keynes del matemático alemán Von Kries (Keynes *A Treatise on Probability*, London Macmillan. 1921). Supongamos que conocemos que el volumen especifico de una sustancia está comprendido entre 1 y 3, aun cuando no conocemos su valor exacto El principio de indiferencia nos justificaría si dijéramos que el volumen específico está, entre 1 y 2 o entre 2 y 3. con igual probabilidad La densidad específica de una sustancia es la recíproca de su volumen específico Si el volumen específico es *V* la densidad específica es 1/*V*. de manera que sabemos que la densidad específica debe estar

Una teoría mucho más aplicable y difundida, que evita algunas de estas dificultades, es la *frecuencia relativa o* interpretación *estadística*. Puede atribuirse, en gran medida, a este punto de vista el adelanto registrado en la aplicación de la probabilidad, no sólo a la física y a la astronomía, sino también a la biología, a las ciencias sociales y a los negocios. La interpretación estadística está estrechamente relacionada con el punto de vista expresado por Aristóteles: lo probable es aquello que ocurre usualmente.

Se considera a la probabilidad como la frecuencia relativa con la cual ocurre un suceso en cierta clase de acontecimientos Así, la probabilidad de un suceso está expresada como una relación matemática definida que se fija hipotéticamente. La hipótesis puede ser verificada ya sea racionalmente, demostrando, por ejemplo, que en base a nuestro conocimiento de las causas mecánicas, una moneda o un par de dados *deben* caer de cierta manera; o experimentalmente, demostrando que la moneda o el par de dados *caen,* efectivamente, de esa manera.

Supongamos que se arroja al azar una moneda. No teniendo conocimientos especiales, no hay razón para predecir cómo caerá la moneda, si cara o cruz. Si es arrojada muchísimas veces y se registra la relación entre cara y cruz, supongamos que se obtienen las siguientes frecuencias:

Número de tiradas	Resultados	
15	6 caras;	9 cruces
20	9 caras;	11 cruces
30	16 caras;	14 cruces

comprendida entre 1 y 1/3 Nuevamente, por el principio de razón insuficiente, es tan probable que quede entre 1 y 2/3 como entre 2/3 y 1/3; pero como el volumen específico es una función de la densidad específica, si esta última está comprendida entre 1 y 2/3 la anterior queda entre 1 y 1½ y en cambio si aquélla está comprendida entre 2/3 y 1/3. la anterior lo estará entre 1½ y 3 De ahí se deduce que es tan probable que el volumen específico esté comprendido entre 1 y 1½, como entre 1½ y 3, lo cual es contrario a nuestra primera suposición de que era tan probable que estuviera comprendido entre 1 y 2 como entre 2 y 3.

40	21 caras;	19 cruces
80	41 caras;	39 cruces
150	74 caras;	76 cruces

Notamos que la *relación* de caras y el número total de tiradas, a medida que éste aumenta, se aproxima más y más a la fracción ½, que representa la frecuencia relativa del conjunto de caras en el conjunto mayor de tiradas. Anticipamos entonces una predicción general, obtenida de un gran número de casos particulares y suponemos que el futuro será consistente con el pasado.

Sin embargo, consideremos por ahora: ¿Qué justificación hay para dar semejante paso? Habiendo realizado nuestro experimento y determinado la frecuencia relativa, decimos ahora que la probabilidad de obtener una cara es ½. Evidentemente, esa proposición es una hipótesis. Con nuevos experimentos podremos reforzar nuestra creencia en esa hipótesis, o bien servirán para que la modifiquemos o la abandonemos. La suposición (basada en nuestro experimento) es que en un gran número de casos, las caras aparecerán tantas veces como las cruces. Si los resultados no corroboran esta hipótesis, llegamos a la conclusión de que la moneda es, quizá, más pesada de un lado que de otro. Pero es importante recordar que ya que la demostración no es lógica, sino solamente experimental, nunca es completa, pues está sujeta siempre a ulteriores experimentos. Una demostración lógica es solamente posible si se conocen todas las causas que afectan a un evento. Evidentemente, fuera de las matemáticas mismas, no puede aparecer una ocasión semejante. De este modo, la verificación de una hipótesis por la experimentación, sólo puede demostrar que, en la práctica real, la frecuencia relativa *se aproxima* a la probabilidad pronosticada, esto es, que nuestras suposiciones son confirmadas por la experiencia.

Es oportuno señalar en qué forma el método lógico o deductivo difiere del experimental. “El proceso de inducción, que es básico en todas las ciencias experimentales, está deste-

rrado para siempre de las matemáticas rigurosas...” [115] A fin de demostrar una proposición en matemáticas, ni siquiera un enorme número de casos donde se apreciara su validez sería suficiente, por cuanto una excepción bastaría para invalidarla. Las proposiciones de matemáticas son solamente verdaderas si no conducen a contradicciones. Pero fuera de las matemáticas, en todas las demás actividades humanas tal restricción tendría un efecto paralizador. El procedimiento científico se apoya sobre la misma regla empírica conveniente que nos sirve de guía en los asuntos prácticos: Una hipótesis es valedera si con más frecuencia nos lleva a resultados correctos que a resultados incorrectos; las verificaciones experimentales son completamente decisivas —hasta que el experimento llevado a cabo al día siguiente las invalide.

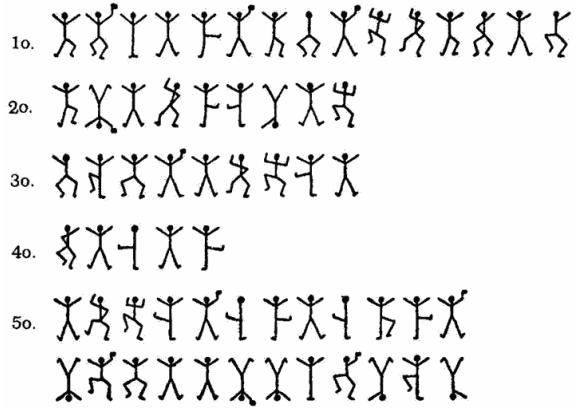


Fig. 76

“La aventura de los bailarines”, de donde se extrajo el incidente relatado al comenzar este capítulo, puede servir nuevamente para enseñar cómo el método estadístico es de utilidad en la inferencia probable. A Holmes se le presenta un criptograma compuesto de varios mensajes (ver fig. 76).

[115] Dantzig. *Number. the Language of Science*.

La solución de la mayor parte de los criptogramas depende muchísimo de cierto conocimiento estadístico, como asimismo de deducciones perspicaces. Holmes dedujo su método de solución de otro ya indicado por Edgar Allan Poe en *The Gold Bug.*

"Sin embargo, habiendo ya conocido que los símbolos representan letras y habiendo aplicado las reglas que nos guían en todas las formas de las escrituras secretas, la solución era bastante fácil. El primer mensaje que me fue presentado era tan breve que me resultaba imposible decir con seguridad que el símbolo representaba una E. Como usted sabe, la letra E es la más común del alfabeto inglés y predomina de tal modo que aun en una frase corta es dable encontrarla frecuentemente. De los quince símbolos contenidos en el primer mensaje, cuatro eran iguales, de manera que era razonable suponer que representaban la letra E. Verdad es que en algunos casos la figura sostenía una bandera y en otros no. pero era probable, de acuerdo a la manera en que estaban distribuidas las banderas, que las mismas habían sido utilizadas para dividir la frase en palabras. Acepté esto como una hipótesis, anotando que la letra E estaba representada por el símbolo .

Pero ahora surgió la verdadera dificultad en la investigación. El orden de las letras inglesas después de la E, no está, en modo alguno, bien definido y cualquier preponderancia que se observe en el promedio de una hoja impresa puede trastocarse en una sencilla frase corta. Hablando en términos generales: T, A, O, I, N, S, H, R, D y L es el orden de más frecuente aparición de las letras, pero T. A, O e I están casi igualadas y sería una tarea interminable ensayar cada combinación hasta llegar a dar con un significado. Por lo tanto, esperé obtener material fresco. En mi segunda entrevista con Mr. Hilton Cubitt, pudo proporcionarme otras dos frases breves y un mensaje que parecería estar formado por una sola palabra, puesto que no tenía bandera alguna. Ahora bien, en la palabra única ya he conseguido las dos E, segunda y cuarta en un vocablo de cinco letras. Podría ser "sever" (separar), "lever" (palanca) o "never" (nunca). No puede haber duda algu-

na de que esta última acepción, considerada como una respuesta a un llamado, es, con mucho, la más probable y las circunstancias la señalaban como una respuesta escrita por la dama. Aceptándolo así, podemos afirmar ahora que los símbolos representan, respectivamente, a N, V y R.

Pero, con todo, aún hallaba una dificultad considerable, cuando una idea feliz me puso en posesión de varias otras letras. Se me ocurrió que si estos requerimientos provenían, como lo esperaba, de alguien que había sido amigo íntimo de la dama de su juventud, una combinación que contenía dos veces E. con tres letras intercaladas, podría muy bien significar el nombre "ELSIE". Al examinarlo, observé que dicha combinación constituía la terminación del mensaje y que se repetía tres veces. Se trataba, evidentemente, de algún llamado a "Elsie". De esta manera conseguí mi L, S, e I. Pero, ¿qué clase de llamado podría ser? Había sólo cuatro letras en la palabra que precedía a "Elsie" y terminaba en E. Con toda segundad la palabra debía ser "COME" (Venga). Ensayé todas las palabras de cuatro letras que terminan con E. pero no pude encontrar una que se adaptara a este caso. Luego, estaba ya en posesión de C, O y M y en condiciones, por lo tanto, de atacar al primer mensaje una vez más, dividiéndolo en palabras y colocando puntos en el lugar de cada símbolo aún desconocido. De esta manera obtuve:

.M .ERE .E SL. NE.

Ahora bien la primera letra *sólo* puede ser A. lo cual constituye un descubrimiento muy útil, puesto que se repite no menos de tres veces en esta breve frase y también es evidente la H en la segunda palabra. Queda entonces:

AM HERE A. E SLANE.

Y llenando los vacíos evidentes en el nombre resulta:

AM HERE ABE SLANEY (Estoy aquí. Abelardo Slaney).

A pesar de los brillantes éxitos alcanzados por el método estadístico, el mismo es susceptible de serias objeciones.

Mientras que algunas de sus dificultades pueden remediarse sin perjudicar en gran parte su utilidad, otras no pueden eliminarse tan fácilmente.

El concepto de límite, que desempeña un papel tan importante en muchas ramas de las matemáticas, se usa también en estadística, aunque aquí su empleo apenas puede ser defendido, puesto que este concepto se presenta, con propiedad, en relación a procesos infinitos. El estadístico lo usa diciendo que las frecuencias se aproximan a una razón límite, pero ni el estadístico ni el físico tratan con el infinito, sino más bien con fenómenos que, por grandes y complejos que sean, son *finitos* y *limitados*. El hecho de que un experimento produzca el mismo resultado 1.000 veces seguidas no constituye una prueba de que los resultados subsiguientes serán compatibles con los anteriores. Incluso Scherezade pudo haber contado un cuento muy desagradable en la noche mil dos.

Difícilmente puede decirse que las frecuencias relativas se aproximan a un límite matemático. El concepto de límite, tal como se le emplea en la teoría de la frecuencia relativa tiene, en términos generales, la misma relación con el concepto matemático de límite como el razonamiento por inferencia probable con respecto al silogismo.

Frecuentemente se hacen referencias a la probabilidad de acontecimientos del pasado, aunque semejante probabilidad, en función del punto de vista de la frecuencia relativa no tiene, aparentemente, significado alguno: "Es poco probable que John Wilkes Booth escapara de los soldados federales después del asesinato de Lincoln", o "Enrique VIII probablemente no estaba tan interesado en la Reforma, cuando rompió con el Papa, como en librarse de Catalina de Aragón". ¿Cómo serán evaluadas tales proposiciones, si la probabilidad es la frecuencia relativa de un suceso dentro de una clase de acontecimientos? En realidad, tratándose de un suceso pasado o futuro, *¿qué quiere decir la probabilidad de un solo suceso?*

Cualquiera que sea la interpretación de la probabilidad que se anticipe, este problema es particularmente difícil. La opinión más acreditada es que la probabilidad no tiene signi-

ficado alguno cuando se aplica a un único suceso, ya sea pasado o futuro.

De acuerdo a la interpretación estadística, la probabilidad se puede referir a un único suceso solamente en relación a una clase de acontecimientos similares. Pero esto, a menudo, lleva a confusiones. Todo el mundo estará de acuerdo en que el siguiente razonamiento es absurdo: En cierta comunidad, el registro de nacimientos en los últimos 10 años, acusa una relación de 51 niñas a 50 niños. Las primeras 35 criaturas nacidas en un mes determinado son niñas. El señor Gómez, que está esperando ser padre, está, por lo tanto, seguro de que las probabilidades están a su favor y que su esposa le obsequiará con un niño, debido a la "ley de los promedios" [116].

Por otra parte, es un error muy común de la misma naturaleza y en el cual todavía incurrimos intuitivamente, que si X saca siete cinco veces seguidas al tirar los dados, la probabilidad de obtener otro siete en la próxima tirada es mucho menor que para cualquier otro número particular. Nos resulta difícil creer que la probabilidad matemática, el azar de un futuro suceso, donde los acontecimientos son independientes, no es afectada, para nada, por lo que ya ha sucedido.

En nuestra vida diaria rechazamos instintiva y deliberadamente este principio. Cuando la lógica dice "se debe", contestamos frecuentemente: "Ahora no." El famoso pragmático Charles S. Peirce describe muy bien este punto: "Si un hombre tuviese que elegir entre retirar una carta de un juego de naipes que contiene 25 cartas rojas y una negra, o de un juego de naipes constituido por 25 cartas negras y una roja; y si por retirar una carta roja su destino lo transportase a la eterna felicidad mientras que si extrae una carta negra le está deparado el eterno infortunio, sería insensato negar que preferiría elegir del juego de naipes que contiene la mayor proporción de cartas rojas, aunque dada la naturaleza del riesgo, no

[116] Para no dejar al lector en suspenso, aclaremos que el Sr Gómez está en la misma situación que si no hubieran sucedido los nacimientos de las primeras 35 criaturas.

podría repetirlo. No es fácil conciliar esto con nuestro análisis de la concepción del azar. Pero supongamos que haya elegido el juego de naipes rojo y que haya extraído la carta negra. ¿Qué consuelo tendría? Podría decir que procedió de acuerdo con la razón, pero ello sólo demostraría que su razón carecía absolutamente de valor. Y si hubiese elegido la carta roja, ¿de qué otra manera podría considerarlo sino como un accidente feliz? No podría decir que si hubiese elegido del otro juego de naipes podría haber sacado la tarjeta nefasta, porque una proposición hipotética tal como: "Si A, entonces B", nada significa con respecto a un único caso [117].

Para finalizar, una breve alusión a una interpretación de la probabilidad, que se atribuye principalmente a Peirce y que parece evitar algunas de las dificultades inherentes a las interpretaciones ya examinadas [118].

Peirce sostiene que la probabilidad se refiere no a acontecimientos sino a *proposiciones.* Con algunas modificaciones, se adhiere a este punto de vista John Maynard Keynes en su notable *Tratado sobre la Probabilidad.* Según Peirce, la probabilidad nada tiene que ver con la intensidad de creencia ni con las frecuencias estadísticas. En lugar de hablar de un suceso tal como "caras", la *teoría de la frecuencia verdadera* discute *proposiciones* tales como "Esta moneda al ser arrojada caerá cara". La probabilidad de la verdad de esta proposición debe ser la misma que la frecuencia relativa con la cual tiene lugar el suceso "cara" en una serie de tiradas.

Esta interpretación de la probabilidad es mucho más adecuada para estimar los acontecimientos aislados. La proposición "Probablemente lloverá mañana" significa que las proposiciones sobre el estado del tiempo, temperatura, presión barométrica, etc., nos inducen a formular esa expresión. En otras palabras, si de nuestro conocimiento del tiempo, inferi-

[117] Charles S. Peirce. *Chance, Love and Logic*.

[118] Para un análisis brillante y que ayuda a recordar admirablemente éste y otros problemas de probabilidad, véase Cohen y Nagel. *An Introduction to Logic and Scientific Method,* New York: Harcourt Brace, 1936

mos esta última proposición, estaremos, más a menudo, en lo cierto que en lo erróneo.

Antes de entrar a considerar unos pocos de los teoremas del cálculo de probabilidades, es menester una advertencia previa. Todo cuanto se ha dicho hasta ahora señala un hecho inequívoco: *Ninguna proposición tiene una verdad probable, excepto en relación a otro conocimiento.* Decir que una proposición es probable, cuando el conocimiento sobre el que se basa es oscuro o inexistente, es absurdo. A menudo hacemos, indudablemente, afirmaciones tácitas acerca de la probabilidad, donde se comprende claramente a qué conjunto de conocimientos nos referimos. Esto es tan permisible como decir que San Francisco está a 3.000 millas siendo evidente que lo que se quiere decir es que "San Francisco está a 3.000 millas de Nueva York". Como ya se ha destacado, es más loable adherirse a una proposición que resulta errónea, en tanto que, la evidencia en virtud de la cual llegamos a nuestra conclusión es la mejor aprovechable, que adelantar una proposición verdadera en base a un razonamiento defectuoso o hechos incorrectos. Herodoto dice: "Nada hay más provechoso al hombre que tomar buen consejo de sí mismo; porque aun si el acontecimiento resulta contrario a sus esperanzas, la resolución de uno sigue siendo correcta aun cuando no haya sido favorecida por la fortuna; mientras que si un hombre procede contrariamente al buen consejo, aunque sea afortunado, y consiga lo que no tenía derecho a esperar, no por eso su resolución era menos engañosa."

EL CÁLCULO DEL AZAR

Tomado con moderación, el juego por dinero tiene virtudes innegables. Sin embargo, presenta un curioso espectáculo lleno de contradicciones. Mientras quienes palidecen por temor a las llamas del infierno no se entregan jamás a sus placeres, los grandes laboratorios y las respetables compañías de seguros se levantan como monumentos a una ciencia que tuvo sus orígenes en el cubilete de dados.

El Caballero de Méré, eufemísticamente llamado el "filósofo jugador" del siglo XVII, deseoso de obtener algunos informes sobre el reparto de riesgos en los juegos de dados, se dirigió a uno de los matemáticos más talentosos de todos los tiempos —el apacible y pío Blaise Pascal. Pascal, a su vez, escribió a un matemático aún más célebre, el Consejero Parlamentario de la Ciudad de Toulouse. Pierre de Fermat, y, en la correspondencia que se sucedió, vio por primera vez la luz del día la teoría de la probabilidad.

Pascal no pudo reprimirse ante un leve reproche de De Méré, no porque éste fuese un jugador, sino por la razón más seria de que De Méré no era matemático: *"Car, il a très bon esprit"* (escribió a Fermat), "*mais il n'est pas géomètre; c'est comme vous savez un grand défaut"* [119]. En realidad, el Caballero merecía algo peor, puesto que la respuesta a su pregunta, que evidentemente estorbó a sus negocios, le impulsó a escribir una diatriba sobre la inutilidad de todas las ciencias, en particular la aritmética. Y ésa fue la suerte de la primera asociación de cerebros.

El interés por la probabilidad aumentó, estimulado por las investigaciones de eminentes matemáticos como Leibniz, Jacques Bernoulli. De Moivre, Euler, el marqués de Condorcet y, sobre todo. Laplace. La obra de este último hizo época, pues en su teoría analítica de la probabilidad, llevó el cálculo a un punto tal que Clerk Maxwell pudo decir que es "matemática para hombres prácticos" y Jevons pudo afirmar, en forma completamente lírica (citando al obispo Butler sin declararlo), que las matemáticas de la probabilidad son "la verdadera guía de la vida y difícilmente podemos dar un paso o adoptar una decisión sin hacer, correcta o incorrectamente, un cálculo de probabilidad". Y estas opiniones fueron emitidas aun antes de que el cálculo hubiese alcanzado sus más brillantes éxitos en física y en genética, o en esferas más prácticas [120]. Era en

[119] Pues tiene un espíritu excelente, pero no es geóme,tra, lo que, como sabe usted, es un gran defecto. *(N. del E.)*

[120] Véase el apéndice a este capítulo.

verdad notable, como escribió Laplace, que "una ciencia que se inició con las consideraciones del juego, se hubiese elevado a los objetos más importantes de la sabiduría humana".

Al desarrollar un cálculo de probabilidades es necesario hacer ciertas suposiciones ideales. En particular, dado que muchísimas cosas a las que desearíamos aplicarlo *no son susceptibles de medida*, debemos ser doblemente cuidadosos en que los axiomas y postulados que formulemos sean precisos, de modo que su campo de aplicación pueda establecerse fácilmente. Ya nos hemos referido al hecho de que la probabilidad matemática de un acontecimiento oscila entre 0 y 1. La probabilidad de un acontecimiento imposible es 0 y la de uno seguro es 1.

Debemos ahora definir qué significa "equiprobable" (igualmente probable). Esto constituye una tarea relativamente difícil; pero, para nuestros propósitos, podemos acortar el camino empleando una definición aproximada.

Dos *acontecimientos contingentes serán considerados equiprobables si*, ya *sea por falta de evidencia, o después de considerar todas las circunstancias que hagan al caso, no es de esperar que se dé un acontecimiento con preferencia al otro*.

Quizás el lector descubra una incongruencia. ¿No se le había advertido, acaso, que no puede apreciarse probabilidad alguna donde falta un conocimiento relevante o apropiado? Sin embargo, aquí se dice que dos proposiciones, o dos acontecimientos, pueden ser igualmente probables, aun si carecemos de conocimiento alguno, cualquiera que sea. ¡Pero ahí está la clave! Un poco de conocimiento es peligroso, mientras que carecer de él por completo es mucho más satisfactorio. Para nuestros fines invocamos el principio de razón insuficiente, de acuerdo al cual, a falta de un conocimiento sobre dos acontecimientos, los consideramos igualmente probables. El lector no debe olvidar que nuestra definición es sólo aproximada —muy burda. Y también que es posible saber que dos cantidades son iguales sin saber qué son. Así, alguien que tenga un conocimiento general sobre los juegos puede saber

que en el ajedrez ambas partes comienzan con fuerzas iguales, sin saber cuáles son éstas, o cualquier otra cosa acerca del juego.

Si suponemos, entonces, que una moneda es simétrica, es *equiprobable* que caerá cara o cruz, ya que no hay razón alguna para anticipar un resultado u otro.

Si hay un número de modos equiprobables en que puede ocurrir un suceso y un número de modos equiprobables en que no puede suceder, la probabilidad de que ocurra el suceso es la relación existente entre el número de modos en que el suceso puede acontecer, con respecto al número total de modos en el que puede y no puede suceder. La moneda puede caer cara o cruz. La probabilidad de que sea cara es pues, la relación: $\frac{Cara}{Cara+Cruz} = \frac{1}{2}$. En general, si llamamos *favorables* a los modos en que un acontecimiento puede suceder y *desfavorables* a los modos en que no puede ocurrir, la probabilidad de un suceso está dada por la fracción $\frac{F}{F+D}$.

Incumbe a la combinatoria, rama de las matemáticas que se ocupa de las permutaciones y las combinaciones, determinar el número de modos diferentes en que un acontecimiento *puede* suceder. Es el estudio de la *posibilidad matemática* y proporciona un marco ideal para las *matemáticas de la probabilidad.*

Los problemas típicos de permutaciones y combinaciones tienen un aspecto árido y monótono. Al principio cuesta trabajo creer que los conocimientos que se adquieren al resolver problemas de este tipo puedan servir de mucho en otros estudios: "Cuatro viajeros llegan a un pueblo donde hay 5 hosterías. ¿De cuántas maneras distintas pueden alojarse, cada uno, en un hotel diferente?" Tampoco parece que una teoría que sirve para determinar de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra *Mississippi* [121], pueda ser útil ya sea para determinar la física del átomo o para fijar las tasas

[121] Como nota de interés diremos que hay 36.568 maneras distintas de ordenar las letras de la palabra "Mississippi".

de seguros. Sin embargo, los teoremas del análisis combinatorio son la base del cálculo de la probabilidad. Tenemos que saber calcular el número total de modos diferentes en que un evento *puede* suceder, antes de aspirar a predecir cómo es *probable* que suceda.

Nuestra moneda, con la que ya hemos trabajado tanto, nos proporciona nuevamente un ejemplo. Para ello la arrojamos tres veces seguidas, siendo posibles los resultados de la figura 77.

Estos ocho resultados posibles contestan todas las preguntas que podrían formularse en permutaciones y combinaciones. Pero además, cualesquiera otras que surjan en el cálculo de la probabilidad, podrían también responderse con ayuda de este diagrama. Así, la *probabilidad* de obtener 3 caras, la da la relación: $\frac{F}{F+D} = \frac{1}{8}$. La probabilidad de conseguir 2 caras y 1 cruz es la relación de los casos 2, 3, 5, a todos los casos posibles, vale decir. ⅜.

Es evidente ahora que la enumeración de todos los casos posibles resulta aburrida y difícil a medida que su número aumenta. Por esa razón, el cálculo contiene muchos teoremas, tomados del análisis combinatorio, que hacen innecesaria la enumeración directa.

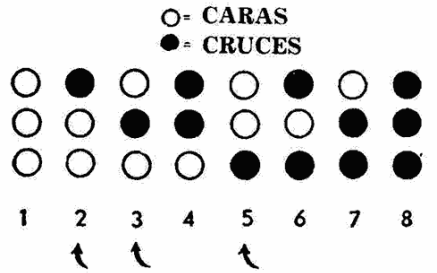


Fig. 77. Los resultados posibles de tirar tres veces una moneda Las flechas indican los casos en que se producen dos caras y una cruz.

SUCESOS QUE SE EXCLUYEN MUTUAMENTE

I, Habiendo cuatro ases en un juego de naipes, la probabilidad de retirar un as de 52 cartas, es 4/52 = 1/13. Pero, ¿cuál es la probabilidad de retirar ya *sea* un as o un rey de un juego de naipes, en una sola vez? Ésta es la probabilidad de sucesos *que se excluyen mutuamente o alternativos*; si uno de los dos sucesos ocurre, el otro no puede acontecer. Un teorema del cálculo expresa que la probabilidad de que ocurra uno entre varios sucesos que se excluyen mutuamente, es la *suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos aislados.* La probabilidad de obtener un as o un rey es, por lo tanto:

$$\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{2}{13}$$

¿Cuál es la probabilidad de sumar 6 o 7, al tirar un par de dados? Podemos enumerar la totalidad de casos favorables de 6 o 7 y luego verificar nuestros resultados con el teorema.

Primer dado		Segundo dado	Primer dado		Segundo dado
1		5	1		6
2		4	2		5
3	VI	3	3	VII	4
4		2	4		3
5		1	5		2
			6		1

Hay 36 *combinaciones posibles* de los dados y 11 son favorables al evento; por lo tanto, la probabilidad de obtener un 6 o un 7 es; 11/36.

Si hubiésemos aplicado el teorema, habríamos tomado la suma de las probabilidades por separado, es decir: 5/36 + 6/36.

SUCESOS INDEPENDIENTES

II. Se dice que dos sucesos son *independientes* uno de otro, si el acontecer de uno no está, en modo alguno, relacionado con el acontecer del otro. Se tira dos veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 veces cara? El teorema correspondiente establece que la *probabilidad de que ocurran a la vez dos sucesos independientes es el producto de las probabilidades individuales de cada uno de los sucesos.* La probabilidad de obtener dos caras seguidas es, por lo tanto: ½ × ½ = ¼. Y. como ya hemos visto, por enumeración directa, la probabilidad de obtener 3 caras seguidas es ⅛. Verificándolo con el teorema sale: ½ × ½ × ½ = ⅛.

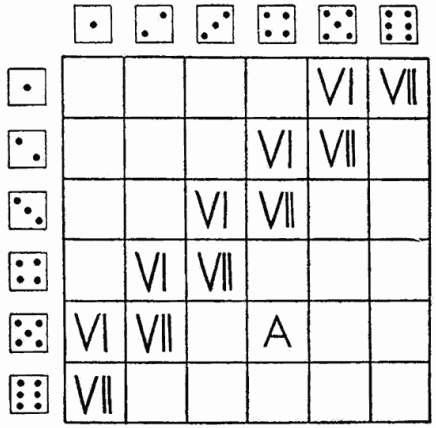


Fig. 78. Cada cuadrado representa un resultado equiprobable. Por ejemplo, el cuadrado señalado con la letra *A* representa la obtención de un 4 con un dado y 5 con el otro. De las treinta y seis posibilidades, cinco resultan con 6 y seis resultan con 7.

Consideremos ahora un problema de forma ligeramente distinta:

Al tirar una moneda dos veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener, por *lo menos, una cara*? Este problema puede resolverse fácilmente sin enumeración, determinando la probabilidad del suceso deseado que no sucede y restando

de 1 esta fracción. Ya que la probabilidad de obtener *dos cruces* seguidas, que es la única alternativa de sacar, por lo menos, una cara, es ¼, la probabilidad de por lo menos una cara es: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

D'Alembert, en su artículo sobre probabilidad en la famosa *Encyclopédie*, reveló que no comprendía el teorema de multiplicar probabilidades independientes. Dudaba que la probabilidad que acabamos de indicar fuese ⅔ razonando que si una cara aparecía en la primera tirada el juego habría terminado, pues no era necesario continuar con una segunda. Enumerando sólo tres casos posibles: Cara, Cruz-Cara y Cruz-Cruz, llegó a la probabilidad ⅔. Pero le faltó considerar que la primera alternativa no era, en sí misma, más probable que la alternativa de obtener una cruz.

Aun cuando D'Alembert entendió decididamente mal los fundamentos de la probabilidad, algunas de sus ideas anunciaron la interpretación estadística. Sugirió que haciendo experimentos, podrían estimarse aproximaciones de probabilidades deseadas.

Mucho antes de la ola de entusiasmo por la estadística, que barrió Europa a mediados del siglo XIX, se llevaron a cabo experimentos de la naturaleza sugerida por D'Alembert. Un naturalista del siglo XVIII, el conde Buffon, realizó muchos experimentos, el más famoso de los cuales es su "Problema de la Aguja-' Veamos en qué consiste: una superficie plana está dividida por líneas paralelas (como en la fig. 79), separadas entre sí por una distancia *H:* tomando una aguja de longitud *L*. menor que *H*. Buffon la dejaba caer sobre la superficie rayada. Consideraba que la caída era favorable cuando la aguja quedaba atravesando una raya y desfavorable cuando caía entre dos rayas. Su sorprendente descubrimiento fue que la *razón* de éxitos a fracasos era una expresión en la que aparecía π. Efectivamente, si *L* es igual a *H,* la probabilidad de un éxito es $2/\pi$. A medida que aumentaba el número de pruebas, tanto más se aproximaba el resultado al valor de π, aun hasta tres cifras decimales.

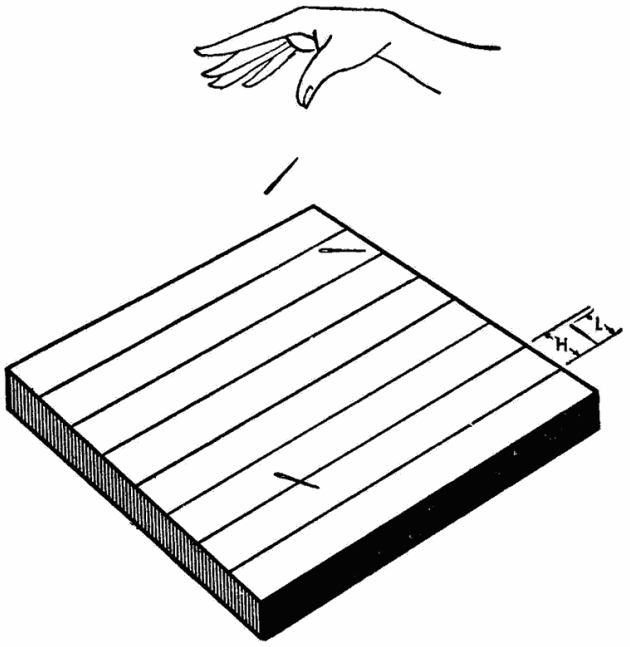


Fig. 79. Problema de la aguja del conde Buffon.

Experimentos más completos fueron realizados en el año 1901 por un matemático italiano, Lazzerini, quien, dejando caer la aguja 3.408 veces, obtuvo para π un valor igual a 3,1415929, con un error de sólo 0,000 0003. Difícilmente podría uno esperar hallar un mejor ejemplo de la interrelación de todas las matemáticas, Hasta aquí hemos visto a π de tres maneras: como la relación de la circunferencia de un círculo a su diámetro, como el límite de una serie infinita y como una medida de la probabilidad.

PROBABILIDAD COMPUESTA

III. El teorema que trata de la probabilidad de acontecimientos independientes, puede, algunas veces, ser extendido

provechosamente para tratar casos en que las probabilidades no son realmente independientes.

Una bolsa contiene una bola blanca (*B*) y dos negras (*N*); la probabilidad de retirar una bola negra es ⅔ y la de una bola blanca es ⅓. Supongamos dos extracciones sucesivas de la misma bolsa, reemplazando la bola después de cada extracción. Ahora, la probabilidad de retirar dos *B* seguidas es: ⅓ × ⅓ = ⅑ y de retirar dos *N* seguidas es: ⅔ × ⅔ = $^4/_9$. Sin embargo, si después de cada extracción no se reemplazan las bolas, las extracciones dejan de ser *independientes* y *dependen* una de la otra. Después de cada extracción debe calcularse la nueva probabilidad a fin de formar la probabilidad *compuesta* correcta. Después de haber retirado una bola, la probabilidad de extraer dos *N* seguidas, sin haber habido reemplazos, es: ⅔ × ½ = ⅓.

Que la probabilidad de la segunda extracción depende del resultado de la primera, se demuestra también por el hecho de que la probabilidad de sacar dos *B* es cero, si no se hace un reemplazo, mientras que es ⅑ si la *B* es reemplazada en el caso de haber sido retirada la primera vez.

IV. Hasta ahora hemos considerado la probabilidad de sucesos: que se excluyen mutuamente, dependientes e independientes. Si se hacen variar y se combinan estos factores, resultan nuevos métodos interesantes.

Una bolsa contiene 6 bolas blancas (*B*) y 6 negras (*N*). Si se retira una bola, son equiparables dos acontecimientos —ya sea B o N. Esto puede indicarse así:

(a) (1) B, (2) N = 2^1

Los resultados posibles, en dos extracciones, son:

(b) (1) *BB*, (2) *BN*, (3) *NB*, (4) *NN* = 2^2

En tres extracciones hay ocho resultados posibles:

(c)

(1) *BBB*,	(3) *BNN*,	(5) *NBN*,	(7) *NNB*,	$= 2^3$
(2) *BNB*,	(4) *BBN*,	(6) *NBB*,	(8) *NNN*,	

En cuatro extracciones hay dieciséis.

(d)

(1) *BBBB*	(5) *NBBB*	(9) NBNB	(13) NNNB	$= 2^4$
(2) *BBBN*	(6) BBNN	(10) BNBN	(14) NNBN	
(3) *BNBB*	(7) BNNB	(11) NBBN	(15) NBNN	
(4) *BBNE*	(8) NNBB	(12) BNNN	(16) NNNN	

Entonces, en general, para n extracciones hay 2^n resultados posibles. ¡Pero este conocimiento es la clave de un método muy valioso! Aprovechémonos de un teorema importante de otra rama de las matemáticas: el teorema del binomio.

Si indicamos con *B* la *extracción* de una bola blanca y con *N* la de una negra, al desarrollar la expresión $(B + N)^2$, de acuerdo al teorema del binomio, obtenemos:

$$B^2 + 2BN + N^2$$

Ahora bien, esta expresión algebraica indica lo que ya se señaló explícitamente en el apartado (b), es decir: todos los resultados posibles de dos extracciones practicadas en una bolsa que contiene el mismo número de bolas negras y blancas. Así [122]:

(1) *BB*	$= B^2$
(2) *BN*	$=2\ BN$
(3) *NB*	
(4) *NN*	$= N^2$

Tres extracciones de dicha bolsa, se representan por la expresión:

$$B^3 + 3B^2N + 3BN^2 + N^3$$

pues, nuevamente:

[122] El lector no deberá confundirse por el hecho de que *BN* y *NB* se representen simplemente por 2*BN*. 2*BN* significa sencillamente dos extracciones en cada una de las cuales hay una bola negra y una blanca, sin tener en cuenta el orden en que aparecen.

(1) *BBB*	$= B^3$
(2) *BBN*	
(3) *BNB*	$= 3B^2N$
(4) *NBB*	
(5) *NNB*	
(6) *NBN*	$= 3BN^2$
(7) *BNN*	
(8) *NNN*	$= N^3$

Hay, por lo tanto, ocho resultados posibles, una manera de conseguir tres blancas, tres maneras de conseguir dos blancas y una negra, tres modos de lograr dos negras y una blanca y una manera de obtener tres negras. Las probabilidades respectivas son: ⅛, ⅜, ⅜ y ⅛.

Para *n* extracciones seguidas, el teorema general del binomio da [123]:

$$(B+N)^n = B^n + nB^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2!}B^{n-2}N^2 +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}B^{n-3}N^3 + \cdots + N^n$$

Consideremos una nueva aplicación del teorema del binomio: Una bolsa contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Después de cada extracción se reemplaza la bola. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3*B* y 2*N* en 5 extracciones?

[123] Sin molestarse para recordar la fórmula general, mediante el famoso triángulo de Pascal, uno puede determinar inmediatamente los coeficientes de cualquier desarrollo binomial:

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Examinando esta disposición, el lector podrá deducir cómo se forma cada nueva hilera.

Ahora bien, para cada extracción la probabilidad de una *B* es ⅗ y la de una *N* es ⅖. Desarrollando

$$(B + N)^5 = B^5 + 5B^4N + 10B^3N^2 + 10B^2N^3 + 5BN^4 + N^5$$

El resultado, cuya probabilidad buscamos, es B^3N^2 ya que representa 3*B* y 2*N*. Hay diez resultados posibles puesto que el coeficiente del término B^3N^2 es 10. La probabilidad buscada, que es compuesta, debe ser, por lo tanto:

$$10 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}$$

A estas alturas resulta completamente evidente cuán limitados son los casos en que el cálculo de la probabilidad es aplicable. En ninguno de los varios ejemplos mencionados en el segundo apartado de este capítulo, por muy adecuadamente que puedan haber ilustrado el concepto de probabilidad, tiene aplicación nuestro mecanismo matemático. En efecto, el cálculo de la probabilidad, como todas las demás disciplinas matemáticas, no puede ser considerado como una fuente de información sobre el mundo físico. Además, hablando en términos matemáticos, sería posible definir qué quiere decir equiprobable, pero sin duda es imposible encontrar dos acontecimientos en el mundo físico que sean, realmente, equiprobables.

La equiprobabilidad es, en el mundo físico, simplemente una hipótesis. Podemos emplear el mayor cuidado y usar los instrumentos científicos más exactos para determinar si una moneda es o no simétrica. Si estamos satisfechos en que lo es y nuestras pruebas en ese sentido, es concluyente, nuestro conocimiento, o mejor aún nuestra ignorancia, con respecto al enorme número de otras causas que afectan la caída de la moneda es tan insondable, que la simetría de la misma es un mero detalle. Luego la proposición "cara y cruz son equiprobables" es, en el mejor de los casos, una suposición.

Sin embargo, el cálculo de la probabilidad solamente es útil una vez que hemos hecho una suposición —una suposición que, como todas las hipótesis en la ciencia, debe justifi-

car su existencia por su utilidad y que, además, debemos estar preparados para modificar o descartar cuando la experiencia deja de corroborarla.

Siguiendo tan atrevido procedimiento, las matemáticas de la probabilidad han tenido notable éxito en la ciencia y en el comercio. En los siglos XVIII y XIX, cuando la ciencia y la filosofía estaban casi por completo bajo el influjo de ideas mecanicistas, se supuso con entusiasmo que el cálculo de la probabilidad supliría toda "ignorancia y flaqueza de la mente humana". El cálculo ayudaría a iluminar aquellas regiones del conocimiento donde el faro de la ciencia no alumbraba aún muy brillantemente.

Es fácilmente comprensible que se hiciera popular una filosofía materialista, conveniente y dogmática, en un mundo que había sido testigo de una sucesión de proezas científicas, desde Kepler a Galileo y desde Newton a Laplace. El concepto materialista está basado en una fe intuitiva en la regularidad y el orden periódico en que se cumplen los fenómenos naturales, desde el comportamiento de los átomos hasta el nuestro al levantamos por la mañana. Los hombres esperaban, y la historia de la ciencia hasta hacía muy poco los alentaba a creerlo, que la ciencia explicaría todos los milagros y revelaría todos los secretos, que el futuro estaba contenido en el pasado y que, por lo tanto, debía parecerse a él, y en consecuencia, las experiencias del pasado ayudarían a predecir el futuro.

Como representante sobresaliente de estos puntos de vista, Laplace depositaba mucho mayores esperanzas en los límites de los conocimientos que en el modesto crepúsculo de la mediocridad en el que la mente humana, según opinaba Locke, tendría que andar siempre a tientas.

"Es nuestro deber entonces", escribió Laplace. "considerar el estado actual del Universo como un efecto de su anterior estado y como la causa de uno que lo sucederá. Si fuera dable tener por un instante una inteligencia que pudiera abarcar todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen —una inteligencia

suficientemente enorme como para someter al análisis estos datos— comprendería en la misma fórmula el movimiento de los cuerpos más grandes del Universo y el del átomo más liviano; para ella nada sería incierto y el futuro, así como el pasado, se presentarían ante sus ojos"[124].

Cuando Napoleón le preguntó a Laplace en qué lugar de su obra monumental *Mécanique Céleste* había alguna referencia a la Divinidad, se dice que le respondió: "Señor, no tengo necesidad de esa hipótesis." Oyendo a Napoleón relatar esta anécdota, Lagrange hizo notar; "Esa, Excelencia, es una hipótesis maravillosa." La física moderna, y en realidad toda la ciencia moderna, es tan humilde como Lagrange y tan agnóstica como Laplace. No creyendo en Dios, no se atribuye a sí misma ni omnisciencia divina, ni la posibilidad de alcanzarla.

Allá por el siglo XVIII se tenía la convicción de que la utopía de la perfección moral y política estaba cercana, y más todavía, la perfección en las ciencias físicas. Aunque no se hubieran descubierto todavía las leyes naturales exactas que gobernaban estos campos, nadie dudaba de que existieran. Entre tanto, el cálculo de probabilidades supliría la deficiencia. Cierto era que no se conocían con tanta precisión los fenómenos sociales como los movimientos de los planetas, pero se daba por seguro que al ser estudiados a gran escala presentarían las mismas regularidades que aquéllos. La probabilidad iba a ser un recurso provisional, a modo de mapa de artillería, que los hombres de ciencia completarían a su debido tiempo.

Las esperanzas eran muchas y entre aquellos que más esperaban se contaba el marqués de Condorcet. La teoría de la probabilidad, pensaba, podría aplicarse eficazmente a los juicios de los tribunales a fin de reducir a un mínimo el peligro de fallos erróneos. Con ese propósito sugirió que, aumentando el número de jueces en cualquier tribunal, se asegurarían muchísimas opiniones independientes que, al ser aunadas, constituirían una salvaguardia de la verdad, neutralizando

[124] Laplace. *Essai Philosophique sur la Probabilité.*

las opiniones extremas y los puntos de vista perjudiciales. Desgraciadamente Condorcet olvidó tomar en consideración otros numerosos factores, de los cuales no era el menor la lógica de los devotos de la guillotina, y precisamente fue a ésta a la que lo envió finalmente, como una ironía y una tragedia a la vez, el juicio de un tribunal revolucionario, compuesto por muchos jueces, todos los cuales sostenían las mismas opiniones extremas.

En la atmósfera menos caldeada del siglo XIX, fueron vindicados algunos de los puntos de vista de Condorcet —ya que no en la moral ni en la política, por lo menos en la ciencia y en la industria. La consideración estadística de la naturaleza alteró el mapa de la ciencia en los siglos XIX y XX, tanto, quizá, como los inventos y los descubrimientos del laboratorio. En realidad (y no nos cansamos de destacar este punto), la consideración estadística se ha difundido y ha penetrado tanto en el pensamiento científico moderno y en el método, que ha llegado mucho más allá de lo que Condorcet podría haberse imaginado. Pero el materialismo fundamental de su tiempo, que acompañó a esta fe en la probabilidad, se ha desvanecido por completo.

En lugar de servir como un recurso, como un sustituto para las leyes naturales aún no reveladas, la deducción estadística ha llegado a tiempo para suplantarlas casi completamente. Esto significa un cambio en la interpretación de la realidad física, comparable en importancia intelectual al Renacimiento. Teniendo esto bien presente, los físicos contemporáneos se refieren frecuentemente al Renacimiento de la Física Moderna.

En su gran obra sobre la *Teoría Analítica del Calor*, Fourier enunció el principio que mejor sirve de ejemplo a lo que ya hemos mencionado como el punto de vista clásico de la física, y en realidad de todas las leyes naturales: “Las causas fundamentales nos son desconocidas, pero están sometidas a leyes simples y constantes, que pueden descubrirse mediante la observación; el estudio de ellas constituye el objeto de la

filosofía natural." Y continuó, agregando: "El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda en descubrimientos matemáticos... No puede haber un idioma más sencillo, más libre de errores y de oscuridades, es decir, más digno para expresar las relaciones de las cosas naturales... Reúne fenómenos de lo más diversos y descubre las analogías ocultas que los relacionan."

El hombre de ciencia de la actualidad, particularmente el físico, estaría de completo acuerdo con la última parte de esa cita. Convendría en que las matemáticas constituyen el idioma ideal para expresar los resultados de sus observaciones y aun las incertidumbres de sus predicciones. Sin embargo, disentiría sensiblemente con Fourier, cuando éste dice que las leyes que rigen los fenómenos naturales son *'simples"* y *"constantes"*.

En lugar de sostener la opinión de que la naturaleza obedece a leyes perfectas y seguras, que es tarea del hombre de ciencia descubrir y explicar, el físico se contenta con formular hipótesis y realizar experimentos para llevar una especie de teneduría de libros científica, con ayuda de la cual hace un balance de tiempo en tiempo. Ese balance no tiene relación alguna con las verdades eternas. Se refiere únicamente a activos y pasivos. En lugar de aplicar su fe a descubrir en todos los fenómenos naturales un orden general, regular y periódico, se contenta con la esperanza de que haya un método casual en la locura del mundo físico; que en lo grande, ya que no en lo pequeño, haya alguna apariencia de un plan.

El viejo dogmatismo materialista parecía excluir ulteriores especulaciones metafísicas acerca de la naturaleza de la realidad y era "cómodo y completo". Tenía el "poder compulsivo de la vieja lógica". El plan general del mundo era riguroso y seguro y los misterios del Universo, sus aparentes incertidumbres, eran las confesiones de nuestra propia incapacidad, de nuestras propias limitaciones. Cuando decíamos que la caída de una moneda estaba determinada por el azar "considerábamos esta confesión de incertidumbre como debida a nues-

tra propia ignorancia y no a las incertidumbres de la naturaleza".

Pero la nueva física y la nueva lógica han cambiado nuestros puntos de vista tan profundamente como han alterado nuestra distinción básica entre materia y energía. "Comenzamos teniendo prejuicios contra la probabilidad, considerándola como un sustituto, y predispuestos en favor de la causalidad" y terminamos convencidos de que los contornos del mundo "no son definidos, sino vagos" y que nuestras leyes científicas más exactas son sólo aproximadas, aunque bastante buenas para nuestros rudimentarios sentidos. Así, en lugar del silogismo y las leyes de la lógica formal, nuestras ideas sobre el universo físico deben estar formadas enteramente por las reglas de la inferencia probable. Hemos de traducir: "Sócrates es un hombre; todos los hombres son mortales, por lo tanto, Sócrates es mortal", como una proposición sobre el mundo de los hechos, en "Sócrates probablemente morirá, porque de acuerdo con todo lo que sabemos hasta ahora, todos los hombres antes que él han muerto". "Las incertidumbres del mundo las atribuimos ahora, no a las incertidumbres de nuestros pensamientos, sino más bien al carácter del mundo que nos rodea. Es un punto de vista más sensato, más maduro y comprehensivo." [125]

Aquí recordamos las patéticas palabras de Charles Peirce: "Todos los asuntos humanos descansan sobre las probabilidades y la misma cosa es verdadera en todas partes. Si el hombre fuese inmortal, podría estar perfectamente seguro de ver el día en que todo aquello en que había confiado traicionaría su fe, y, en suma, de llegar, con el tiempo, a una miseria sin esperanza. Se derrumbaría, al final, como todas las grandes fortunas, las dinastías y las civilizaciones. En lugar de esto tenemos la muerte.

"Pero lo que, sin la muerte, sucedería a cada hombre, con la muerte debe ocurrirle a algún hombre... Me parece que

[125] Citado de C G Darwin. *Presidential Address to the Bntish Association.* 1938.

somos conducidos a ésta, que la lógica requiere inexorablemente que nuestros intereses *no* serán limitados. No deben detenerse ante nuestro propio destino, sino que deben abarcar a toda la sociedad."

APÉNDICE

Una discusión sobre la teoría de la probabilidad, mal puede omitir algunas aplicaciones. Son, sin embargo, generalmente muy técnicas, pero el lector más perseverante encontrará, con seguridad, que estas pocas, elegidas al azar, son interesantes.

La teoría cinética de los gases y la curva de probabilidad del error

La ley de los gases fue determinada experimentalmente por el físico y químico inglés Robert Boyle (1627-1691), cuya obra más importante lleva el título: *El Químico Escéptico: o Dudas* y *Paradojas Químico-Físicas concernientes a los experimentos mediante los cuales vulgares Espagíricos tratan de demostrar que la Sal, el Azufre* y *el Mercurio son los verdaderos Principios de las Cosas.* Su ley de los gases establece que la presión de un gas es inversamente proporcional a su volumen. Así: Presión × Volumen = Constante. Pero cualquier volumen de un gas está constituido por un enorme número de moléculas en movimiento, cada una de las cuales posee una velocidad proporcional a su energía. Naturalmente, las colisiones moleculares tienen lugar en gran número, a cada instante. Se ha estimado que en "el aire ordinario cada molécula choca con alguna otra cerca de 3.000 millones de veces por segundo y que recorre una distancia media de cerca de 1/160.000 pulgadas, unas 0,16 milésimas de milímetro entre dos choques sucesivos." [126]

[126] Sir James Jeans. *The Universe Around Us* (New York Macmillan. 1929)

Suponiendo que estos choques se produzcan con perfecta elasticidad, es decir, sin pérdida de energía, puede deducirse que en cualquier instante habrá algunas moléculas moviéndose en todas direcciones y con todas velocidades. Matemáticamente demostraron, primero Clausius y posteriormente Maxwell y Boltzmann que $P = \frac{1}{3}\, nmV^2$, donde P es la presión, n, el número de moléculas en la unidad de volumen, m, la masa, de cada una de ellas y V^2, el valor promedio del cuadrado de la velocidad.

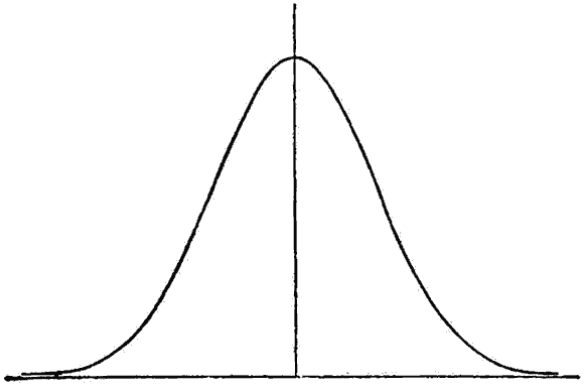


Fig. 80

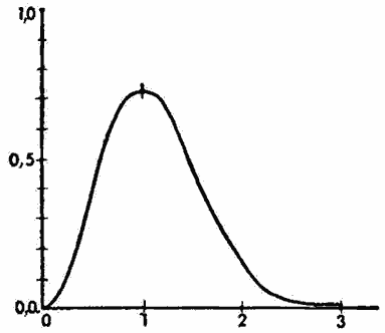


Fig. 81. Velocidad de las moléculas de un gas.

Al problema de la distribución de las velocidades entre las moléculas. Maxwell aplicó la ley del error de Gauss (de mu-

cha importancia en todas las ramas de la investigación científica) y que se deduce de la teoría de la probabilidad.

La curva normal del error (véase la fig. 80) puede obtenerse mediante el desarrollo del binomio $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^n$ cuando $n \to \infty$. Esta curva demuestra que en la observación ordinaria, los pequeños errores tienen lugar con mayor frecuencia que los grandes.

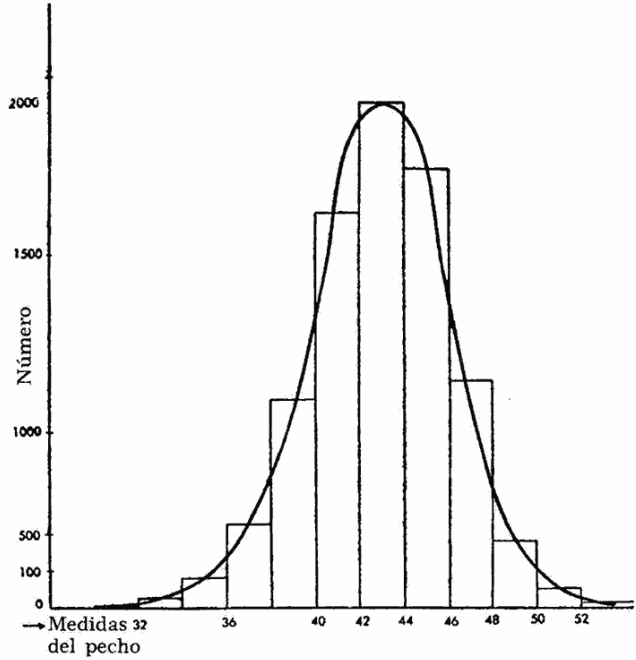


Fig. 82. Esta curva de distribución indica las medidas de los perímetros torácicas de soldados escoceses. Incidentalmente sirve también para describir fenómenos tan variados como los siguientes: 1. Distribución de las edades de los jubilados de una gran empresa. 2. Jugadas en la ruleta. 3. Distribución de los impactos en el tiro al blanco.

"La teoría (cinética) demuestra que las moléculas sometidas al riesgo de chocar pueden dividirse en dos grupos, cada

uno de los cuales se mueve con cierta variación de velocidad, en la forma ilustrada en el diagrama" [127] (véase la fig. 81). La semejanza de esta curva con la curva normal del error es manifiesta.

"Las abscisas miden las velocidades y las ordenadas el número de moléculas que se mueven a esa velocidad. Se toma como unidad la velocidad más probable. Se verá que el número de moléculas que se mueven con una velocidad sólo tres veces mayor que la más probable, es casi insignificante. Pueden dibujarse curvas análogas para representar la distribución de los tiros en un blanco, o de los errores en una medición física, o de los hombres agrupados de acuerdo a su estatura o peso, longevidad o sus capacidades reveladas por un examen..." [128]

La estadística en la antropología

El astrónomo belga. L. A. J. Quételet (1796-1874) demostró que la teoría de la probabilidad podría también aplicarse a los problemas humanos. Así, la misma distribución se encuentra en las jugadas a la ruleta que en la de las balas alrededor del centro de un blanco, en la medida del perímetro torácico de los soldados escoceses o en las velocidades de las moléculas de un gas.[129]

La estadística y acontecimientos pasados [130]

Uno de los problemas más antiguos en probabilidad se refiere a la disminución gradual de la probabilidad de un acon-

[127] Sir William Dampier. *A History of Science and its Relations with Philosophy and Religion* (New York Macmillan. 1936)

[128] Sir William Dampier *op cit*

[129] *Ibíd.*

[130] John Maynard Keynes. *A Treatise on Probabihty* {New York and London Macmillan. 1921) capítulo XVI, página 184-

tecimiento pasado a medida que aumenta la duración de la tradición por la cual está establecido. Quizá la solución más famosa de ello es la respuesta dada por Craig en su *Theologiae Christianae Principia Mathematica*, publicada en 1699. Demuestra en ella que los escépticos de cualquier historia varían en la razón duplicada de los tiempos tomados desde el comienzo de la historia de una manera tal que ha sido descrita como una clase de parodia de la obra *Principia* de New- ton. «Craig», dice Todhunter, «llegó a la conclusión de que la fe en el Evangelio, en todo lo que dependiera de la tradición oral, expiró allá por el año 880, y mientras dependiera de la tradición escrita, expiraría por el año 3150. ¡Peterson, adoptando una ley de disminución diferente, llegó a la conclusión de que esa fe terminaría en 1789!»

En el *Budget of Paradoxes*, De Morgan cita a Lee, el orientalista de Cambridge, al efecto de que los escritores mahometanos, en respuesta al argumento de que el Corán no tiene la evidencia proveniente de los milagros cristianos, afirman que la evidencia de los milagros cristianos se debilita diariamente y al fin deberá llegar el tiempo en que dejarán de proporcionar la seguridad de que hubo milagros y de ahí la necesidad de otro profeta y otros milagros.

La estadística de las muertes provocadas por incursiones aéreas

El profesor J. B. S. Haldane, en una comunicación a *Nature* (octubre 29 de 1938), analizó las matemáticas de la protección contra incursiones aéreas. Sería muy difícil encontrar un comentario más audaz sobre la sociedad contemporánea, aun cuando su tono y propósito son fríamente desapasionados y puramente científicos en su esencia:

"En vista de las discusiones que se suscitan sobre este tema, parece conveniente tener alguna medida cuantitativa acerca del grado de protección que depara un refugio antiaéreo dado. A fin de limitar el problema, podemos considerar solamente los riesgos de muerte y concretamos a bombas

altamente explosivas. Las bombas incendiarias han demostrado constituir un peligro insignificante para la vida, en España, y las de gas son también insignificantes salvo para los niños de corta edad y para aquellos a quienes no ajusta bien la máscara antigás.

"Considérese un tipo determinado de bomba, digamos por ejemplo, de 250 kg que se ha utilizado comúnmente en las zonas centrales de las ciudades españolas, y un hombre en una situación dada, ya sea en la calle o en un refugio. Sea *n* el número de bombas que se espera caerá en su vecindad (por ejemplo 1 kilómetro cuadrado) durante toda la guerra. La distribución de bombas sobre esta superficie la consideraremos uniforme ya que la puntería es muy deficiente cuando se bombardean ciudades. Sea *p* la probabilidad de que una sola bomba, que caiga en el punto de coordenadas (*x*, *y*) de esta superficie, lo mate. Entonces, la probabilidad de que sea muerto en el curso de la guerra es: $P = f(n/A)p\,dx\,dy$, tomando la integral sobre toda la vecindad de área *A*.

"Los valores de *n* y *p* serán, por supuesto, diferentes para cada tipo de bomba y habrán de sumarse las distintas expresiones que se obtengan. Además, el hombre estará en distintos lugares durante la guerra y, de este modo, se hace necesaria una nueva suma. Finalmente, debe sumarse *P* para toda la nación.

"El sistema de evacuación tiene por finalidad reducir el valor de *n* aun cuando pueda aumentar el de *p*, como cuando un niño es evacuado de una casa bastante sólida para llevarlo a una endeble casita de campo. La tendencia a la dispersión dentro de una zona peligrosa, no reduce, por supuesto, ni a *n* ni a *p*. Garantiza, simplemente, que una sola bomba no matará a un gran número de personas, mientras que aumenta la probabilidad de que cualquier bomba mate, por lo menos, a una persona. Es probable salvar unas pocas vidas compensando los números de heridos a ser tratados en diferentes hospitales; y el efecto sicológico de tener 20 muertos en cada una de las 10 zonas puede ser menor que el de 200 en una sola zona. Pero como, en realidad, ello puede aumentar el valor medio

de *p*, al alentar a las personas a permanecer en un número de construcciones endebles antes que en un edificio sólido es, al menos, tan probable aumentar el número total de muertes como el disminuirlas. El argumento de que cierta cantidad de personas no debe ser concentrada en un lugar a fin de que una sola bomba no mate a centenares de ellas, es claramente falso cuando se aplica a una guerra en la que el número de muertes totales será elevado. Sin embargo, es cierto que en un pequeño número de hombres-clave, cada uno de ellos puede reemplazar a otro, éstos no deben ser agrupados juntos."

VIII. GEOMETRÍA DE LA LÁMINA ELÁSTICA

Se e-s-t-i-r-a.
ANUNCIO PUBLICITARIO

En una época ya pasada, siete puentes atravesaban el sinuoso curso del río Pregel en su paso a través de la pequeña ciudad universitaria alemana de Königsberg. Cuatro de ellos unían las orillas opuestas con la pequeña isla de Kneiphof. Un puente comunicaba Kneiphof con otra isla y los dos restantes unían a ésta con tierra firme. Estos siete puentes del siglo XVIII proporcionaron el material para uno de los más célebres problemas de las matemáticas.

Problemas aparentemente triviales han dado origen al desarrollo de diversas teorías matemáticas. La probabilidad nació del cubilete de dados de los jóvenes nobles de Francia; la geometría de la lámina elástica fue urdida en el apacible ambiente de las tabernas de Königsberg. Sencillos ciudadanos alemanes, no eran jugadores; pero les gustaba disfrutar de sus paseos. En tomo a sus jarros de cerveza se preguntaban: "¿Cómo planear el paseo del domingo por la tarde, de modo que se cruce una sola vez cada uno de los siete puentes?"

Repetidos tanteos les llevaron a la convicción de que era imposible; pero una demostración matemática no debe basarse en creencias, ni en ensayos.

Lejos, en San Petersburgo, el gran Euler tiritaba, rodeado de honores y emolumentos como matemático de la corte de Catalina la Grande. A Euler, nostálgico y hastiado de tanta pompa y protocolo, le llegaron de su patria, de manera algo extraña, noticias de ese problema. Lo resolvió con su extraordinario cacumen; la *Topología* o *Análisis Situs* quedó fundada cuando Euler presentó la solución del problema de los puentes de Königsberg ante la Academia Rusa de San Petersburgo, en el año 1735. Esta célebre memoria demostró que el viaje

por los siete puentes, en la forma exigida por el problema, era imposible.

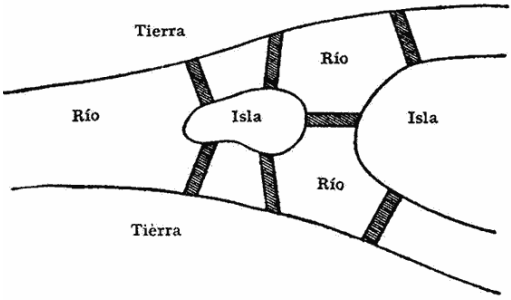


Fig. 83

Euler simplificó el problema reemplazando las zonas de tierra (de la fig. 83) por puntos, y los puentes, por líneas que unían estos puntos. Una vez efectuada esta simplificación, ¿puede dibujarse la figura 84 con un trazo continuo del lápiz, sin levantarlo del papel? Porque esto es equivalente a atravesar físicamente los siete puentes en un paseo. Matemáticamente el problema se reduce al de *recorrer un grajo.* Un "grafo", con la acepción que aquí le damos, es simplemente una configuración que consiste en un número finito de puntos llamados vértices y en un número de arcos. Los vértices son los puntos extremos de los arcos y dos arcos cualesquiera carecen de puntos comunes excepto, quizá, vértices.

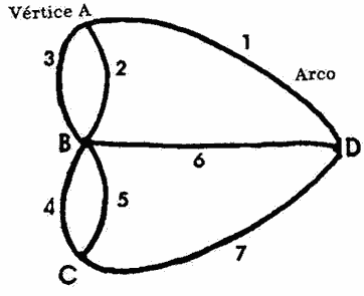


Fig. 84. Una gráfica con cuatro vértices y siete arcos, correspondiente a los puentes de Königsberg.

Un vértice es impar o par, según sea impar o par el número de arcos que a él concurren.

Se *recorre* un "grafo" pasando por todos sus arcos exactamente una vez. Euler descubrió que esto puede hacerse, comenzando y terminando en el mismo punto, si la gráfica sólo contiene vértices pares. Además, descubrió que si la gráfica contiene, a lo sumo, dos vértices *impares*, puede también ser recorrida, pero no es posible volver al punto de partida. En general, si la gráfica contiene $2n$ vértices impares, en la que n es cualquier número entero, se necesitarán exactamente n rutas distintas para recorrerla [131].

La figura 84 es la gráfica de los siete puentes de Königsberg. Ya que sus cuatro vértices son *impares*, es decir, que cada uno de ellos es el extremo de un número impar de arcos. $2n = 2\times2$ y se requieren, por lo tanto, dos rutas para recorrerla; un solo paseo no será suficiente.

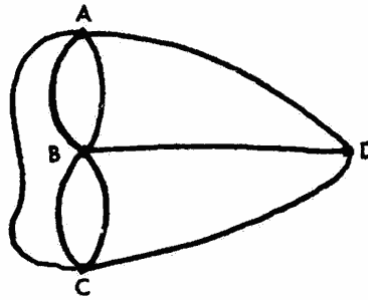


Fig. 85. Una gráfica con cuatro vértices y ocho arcos.

Si, como en la figura 85, se dibuja un arco adicional de *A* a *C*, que representa otro puente y se retira el arco *BD*, todos los vértices serán pares: *A*, *B* y *C* del orden 4 y *D* del orden 2 y, en consecuencia, la gráfica podrá ser recorrida con una sola ruta. Si *no* se retira el arco *BD*, el peatón podrá realizar su paseo, cruzar todos los puentes de una sola vez, pero verá que

[131] Para dos recorridos distintos, debe levantarse una sola vez el lápiz del papel, para tres recorridos, dos veces y para n recorridos distintos, $n-1$ veces.

no puede terminarlo en el punto desde donde partió. Así, si sale de *D*, terminará en *B* y viceversa. (Nota: debe iniciar su paseo desde un vértice impar.)

El problema de los siete puentes es representativo de un grupo de otros problemas, algunos de los cuales datan de la más remota antigüedad. Constituyen un ejemplo de cuán difícil es comprender mentalmente las verdaderas propiedades geométricas de las figuras, aun de las más sencillas.

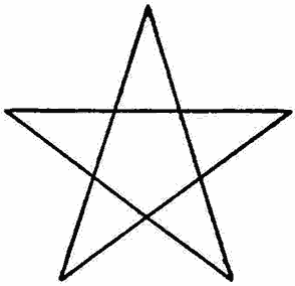


Fig. 86

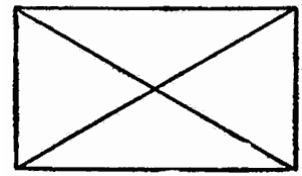


Fig. 87

En la historia de la magia y de la superstición, la figura 86 ha desempeñado un papel importante como talismán contra todas las formas de desgracia. Conocida de los mahometanos y los hindúes, los pitagóricos y los cabalistas, se la grababa frecuentemente en las camitas de los niños para ahuyentar al mal, mientras que, en países más prácticos, se la pintaba en los establos. Es posible recorrer esta estrella, volviendo al punto de partida, con un solo trazo de lápiz.

La regla de Euler explicar por qué la figura 87 no puede ser recorrida mediante un solo trazo de lápiz, puesto que tiene cinco vértices, cuatro de los cuales son los puntos terminales de tres arcos, en otras palabras, de un orden impar y, por lo tanto, se necesitan *dos* rutas.

El pentágono de la figura 88, mucho más complicado en apariencia, puede ser recorrido con un solo viaje. Partiendo del punto *A* el recorrido se haría pasando sucesivamente por los puntos *ABCDEFGBHJDKFAGHCJKEA*.

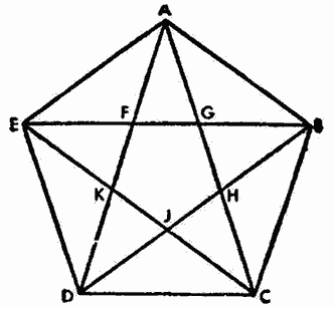


Fig. 88

Aun en el caso de la figura 89 se reduce a un recorrido simple pasando, por ejemplo, por: *ABCc' CDEe' EFAa' AbBDdEfFBb' Cd'DFf'A.*

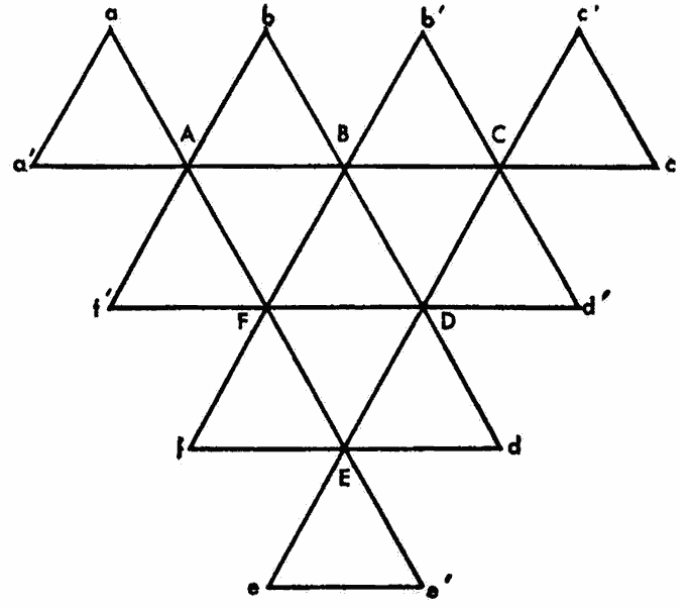


Fig. 89

Al abordar el problema de los siete puentes, Euler hizo mucho más que resolver un simple rompecabezas, puesto que reconoció la existencia de ciertas propiedades fundamentales de las figuras geométricas que no dependen para nada del tamaño o de la forma. Estas propiedades son funciones únicamente de la posición general de las líneas y puntos de una figura. Por ejemplo, sobre una línea *ABC*, el hecho de que el punto *B* esté comprendido *entre* los puntos *A* y *C* es tan importante como el de que la línea *ABC* sea recta o curva, o tenga cierta longitud. Nuevamente (figura 90) cuando un punto interior de un triángulo se une con un punto exterior, la línea que determinan debe cortar a un lado del triángulo, hecho que es tan importante como el de que los ángulos de un triángulo sumen 180°. El estudio de dichas propiedades, que no quedan afectadas cuando se *deforma* la figura, es lo que constituye la ciencia de la *Topología.* La topología es una geometría del lugar, de la posición (lo que explica su otra denominación de *Análisis Situs),* y que se distingue de las geometrías métricas de Euclides, Lobachevsky, Riemann. etc., que tratan de longitudes y ángulos.

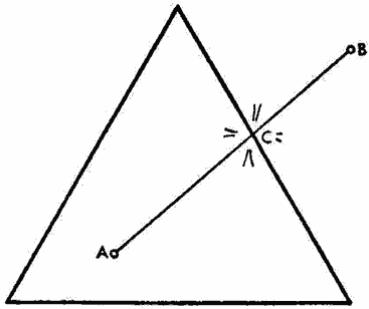


Fig. 90. La línea que une el punto interior *A* con el punto exterior *B corta* al triángulo en *C.* No importa cómo ha sido trazada la línea: debe cortar al triángulo en algún punto.

En topología nunca preguntamos "¿Qué longitud?", o "¿A qué distancia?" o "¿De qué magnitud?", sino que inquirimos "¿Dónde?", "¿Entre qué?". "¿Interior o exterior?" Un viajero,

en un camino desconocido, no preguntaría, "¿A qué distancia se encuentra la granja de Juan?" si no sabe la dirección, ya que la respuesta: "A siete kilómetros", nada le significaría. Es más probable que pregunte "¿Cómo se va a la granja de Juan?" y entonces una respuesta como: "Siga este camino hasta llegar a una bifurcación y luego doble hacia la derecha", le dirá con precisión cuanto necesita saber. Como esta respuesta nada dice de distancias y no describe si el camino es recto o curvo, podrá parecer no matemática y sin embargo, tiene la misma relación, con respecto a la primera pregunta, que la topología con relación a la geometría métrica.

La topología es una geometría *no cuantitativa.* Sus proposiciones serían tan verdaderas en figuras hechas de goma como en las figuras rígidas que se encuentran en la geometría métrica. Por esa razón ha sido denominada, en forma pintoresca. *Geometría de la lámina elástica.*

La geometría era un tema muy de moda en el siglo XIX. El siglo XVIII se había dedicado al cálculo y al análisis. El siglo XIX, en gran parte, perteneció a los geómetras. Era inevitable, entonces, que la topología, que estaba en su infancia, recibiera su parte de atención.

El primer tratado sistemático apareció en 1847, la obra del matemático alemán Listing, intitulada *Vorstudien zur Topologie.* Hoy esta materia, si bien se ocupa de lo mismo que cuando Euler la inventó, ha adquirido una terminología más abstrusa, como cuadra a una ciencia ya desarrollada. Se la define ahora como el estudio de las propiedades de los espacios, o sus configuraciones, invariantes bajo transformaciones bicontinuas y biyectivas; sigue siendo el estudio de la posición y relación de las partes de un figura con respecto a otra sin tener en cuenta la forma o el tamaño. En realidad, aunque la topología fue destetada con puentes, hoy se alimenta con buñuelos, así como con otros objetos más curiosos y menos digeribles.

Aun cuando sólo se trate de una ojeada a uno o dos de los teoremas de esta caprichosa rama de las matemáticas, se requiere la introducción de una nueva terminología.

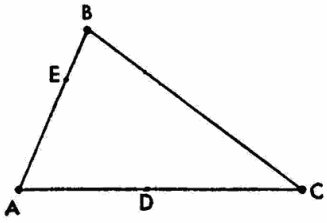


Fig. 91. Un triángulo plano.

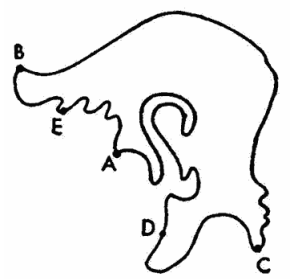


Fig. 92. Su gemelo surrealista.

Poincaré señaló que las proposiciones de la topología tienen un rasgo característico: "Seguirían siendo ciertas si las figuras fuesen copiadas por un dibujante inexperto, que alterase groseramente todas las proporciones y reemplazara las líneas rectas por líneas más o menos sinuosas" [132]. En términos matemáticos, los teoremas no se alteran mediante una transformación bicontinua punto por punto. La figura 91 es un ejemplo de un triángulo plano trazado por un dibujante experto, la figura 92 representa su distorsionado gemelo surrealista. Sin embargo, topológicamente, la figura 92 es una copia perfecta de la figura 91. Las líneas rectas son curvas, los ángulos están cambiados y distorsionados y las longitudes de los lados, alteradas; pero subsisten propiedades geométricas comunes a ambas figuras. Estas propiedades, que no han sido afectadas por la deformación, son llamadas *invariantes*.[133]

---

[132] Poincare. *Science and Hypothes*is. Hay edición española "La Ciencia y la hipótesis", en Espasa Calpe, colección Austral. Madrid

[133] Invariante es un término inventado por el matemático inglés Sylvester, a quien se le llamó el Adán matemático por los muchos nombres que introdujo en las matemáticas Los términos "invariante", "discriminante". "Hessiano". "Jacobiano", son suyos. Además empleaba caracteres hebreos en algunos de sus artículos matemáticos, lo cual, según Cajori, hizo que el matemático alemán Weierstrass lo abandonase horrorizado.
Los invariantes aparecen en otras ramas de las matemáticas La teoría de los

En la figura 91, el punto *D* está situado entre los puntos *A* y *C* y el *E* entre *A* y *B*. En la figura 92 se mantiene ese orden. El *orden* de los puntos, es, por lo tanto, invariante bajo la *transformación* que produjo esa deformación. La figura 91 pudo haber sido transformada de alguna otra manera. Si hubiese sido recortada de una lámina de goma fina y ese triángulo hubiese sido retorcido, estirado o deformado de todas las maneras posibles, sin romperlo, el orden de sus puntos continuaría siendo invariante.

Los invariantes de los cuerpos rígidos, en condiciones de movimiento ordinario, son aún más familiares, pero forman parte de nuestras vidas hasta tal punto que jamás reflexionamos sobre ellos. Sin embargo, nuestra existencia sería completamente inconcebible sin los mismos. Un cuerpo rígido no sufre cambios en tamaño o forma cuando se mueve. Sus propiedades métricas son invariantes. En términos más sencillos, el movimiento no tiene efecto deformante. El sombrero comprado en Londres sigue sentando bien cuando lo transportamos a Nueva York. Una vara de medir tiene la misma longitud tanto si nos encontramos en la cumbre de una montaña como si nos sumergimos en el fondo del mar. Una llave se ajusta a la cerradura, tanto cuando la puerta está cerrada como cuando se encuentra abierta. Un buque parece más pequeño cuando está en el horizonte; pero nadie afirmaría que se contrae a medida que se aleja. Y el sillón del filósofo le sirve lo mismo en cualquier rincón del cuarto, sin tener en cuenta cómo cambia su posición o su filosofía.

Damos por conocidos esos invariantes. Al matemático, sin embargo, las cosas evidentes le resultan claves valiosas y

---

invariantes algebraicos, desarrollada por Clebsch. Sylvester y Cayley, está en la memoria de todos los que han estudiado ecuaciones de 2º grado Por ejemplo, el discriminante de la ecuación de 2º grado $ax^2+bx+c = 0$, es el caso clásico de un invariante algebraico. Una ecuación de segundo grado sometida a una transformación lineal, mantiene inalterada una cierta relación entre sus coeficientes expresada por el discriminante $b^2 = 4ac$. El discriminante de la ecuación transformada queda igual al de la ecuación original multiplicado por un factor que sólo depende de los coeficientes de la transformación.

raramente las descarta, como carentes de importancia. Se fija cuidadosamente en que el tamaño y la forma de los cuerpos *rígidos* no son afectados por el movimiento, y afirma, en lenguaje técnico, que las *propiedades métricas de los cuerpos son invariantes bajo la transformación del movimiento.* Se fija después en aquellos cuerpos que *no* son rígidos y que *cambian* de tamaño y forma cuando se mueven, buscando sus invariantes geométricos. La topología se ocupa de estos invariantes y forma con ellos un sistema matemático.

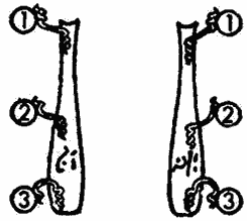


Fig. 93. Únase 1 con 1, 2 con 2 y 3 con 3 mediante líneas que no se corten.

Según una antigua fábula, un califa persa que tenía una hija muy hermosa, estaba tan molesto por el número de sus pretendientes que se vio obligado a establecer pruebas de selección a los efectos de determinar a los finalistas. A los aspirantes de la mano de su hija se les planteó un problema (fig. 93), que consistía en unir los números correspondientes de las figuras simétricas, mediante líneas que no se corten.

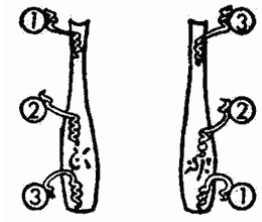


Fig. 94. Trátese de unir dos números correspondientes por medio de rectas que no se corten.

Eso era sencillo. Pero no obstante, la hija del califa no fue ganada tan fácilmente, puesto que su padre insistió, además, en que los aspirantes sobrevivientes uniesen los números correspondientes de la figura 94.

A menos que el califa cediera, podemos suponer que su hija murió solterona, por cuanto este problema no puede ser resuelto. Pueden trazarse dos líneas que unan dos números cualesquiera correspondientes, pero no puede trazarse la tercera sin cruzar a una de las otras dos. Una vez más, vemos por qué el matemático nunca descarta lo evidente. El problema de la figura 93 es fácil. El de la figura 94 parece igualmente fácil y sin embargo es realmente imposible. ¿En qué aspectos esenciales difieren ambos?

Ya a comienzos del siglo XIX el físico Kirchhoff reconoció la importancia de las investigaciones en topología, a fin de contribuir a la solución de los problemas relacionados con la ramificación y el entrelazamiento de los alambres y otros conductores de corriente eléctrica. Y, aunque parezca muy extraño, muchos efectos importantes en la física han sido hallados exactamente análogos a las relaciones espaciales expuestas en el problema del califa.

El primer paso real en el ataque sistemático a todos esos problemas, fue dado en el siglo XIX por el matemático francés Jordán. Su teorema es tan fundamental e importante para la topología, como el teorema de Pitágoras lo es para la geometría métrica. No se parece, en modo alguno, a los teoremas matemáticos hasta ahora enunciados. Dice simplemente que: *"Toda curva cerrada en el plano, que no se corta a sí misma, divide al plano en una parte interior* y *en otra exterior.*"

Sin duda alguna que esto produce la impresión de ser, o idiota o maravilloso. ¿Habrán trabajado los matemáticos durante siglos, para producir semejante cosa? Pero el teorema de Jordán sólo *parece* idiota, porque expresado en términos *no* formales, resulta tan evidente que no valdría la pena repetirlo. Pero la verdad es que se trata de un teorema maravilloso, porque es tan simple, tan modesto y al mismo tiempo tan importante.

Una curva que divide al plano en una parte interior y en otra exterior, se denomina *simple*. La figura 95 es una curva simple.

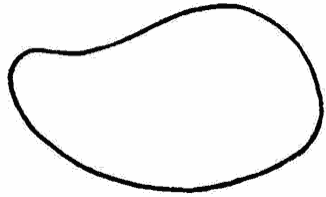


Fig. 95

En cambio las de las figuras 96a, 96b y 97 no lo son.

Las curvas de las figuras antes citadas no caen dentro de la definición de Jordán de conexión simple. La primera tiene dos interiores y un exterior; la segunda, varios interiores y un exterior y el área encerrada por la curva más pequeña de la figura 97 es también considerada "exterior" y no interior.

Fig. 96(a)

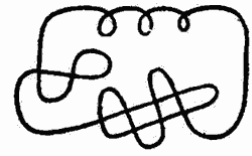


Fig. 96(b)

Ni tampoco ésta:

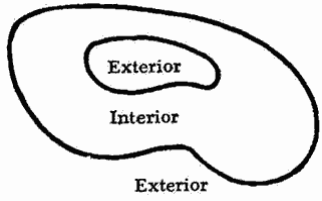


Fig. 97

Debe admitirse que el teorema de Jordán parece trivial cuando se aplica a figuras fáciles. Pero no es tan fácil de creer que la curva de la figura 96b, a pesar de su apariencia tortuosa y carácter laberíntico, tiene solamente un interior. Por extraño que parezca, dicha curva puede ser considerada como un

círculo deformado. Podría verse esto muy fácilmente si estuviese hecha con un trozo de cordel o con una anilla de goma, ya que luego podría ser transformada en un círculo alisando las partes entrelazadas y retorcidas. En geometría métrica se define al círculo como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto dado; lo cual significa que todos los radios de un círculo son de igual longitud. Pero en topología el concepto de "igual longitud" carece de significado. De este modo se concibe al círculo como a la curva que posee la propiedad fundamental de dividir a todo el plano en una parte interior y en otra exterior. Cualquier curva, por deformada que sea, que tenga esta propiedad, puede ser considerada *equivalente topológica de un círculo.* Se deduce entonces que: *toda curva simple en el plano es topológicamente equivalente a un círculo.*

Cuando el teorema de Jordán se extiende a tres dimensiones, se enuncia diciendo que cualquier *superficie* cerrada, cualquier variedad de dos dimensiones[134], que no se corta a sí misma, divide al espacio en una parte interior y en otra exterior.

Piense usted en el cuarto donde se encuentra. El aire del mismo, todos sus muebles y usted están *adentro.* El resto de todo el Universo, desde el Vesubio hasta el centro de la Tierra, desde la plaza Times Square hasta los anillos de Saturno y más allá, están *afuera.* El gas en un globo está *adentro,* mientras que todo lo demás, en todas las direcciones posibles, incluyendo las esperanzas y los temores que bullen en la cabeza del astronauta, son *exteriores.* El sistema circulatorio humano es una variedad de dos dimensiones difícil de concebir. Sin embargo, es *simplemente conexo.* Divide al espacio en una parte interior y en otra exterior. Interiormente circula el torrente sanguíneo, exteriormente están las innumerables células del cuerpo que se tejen y entretejen con los vasos sanguíneos y, más allá, todo el Universo.

[134] Véase el cap. IV y su nota nº 4.

La restricción de que la variedad de dos dimensiones no se debe cortar a sí misma, no trae a la memoria ninguna que lo haga. Sin embargo, dichas variedades son centro de atracción en el Instituto de Estudios Superiores, en Princeton, donde matemáticos eruditos y famosos discurren, en forma extraña, casi como la morsa de Alicia, sobre rosquillas, nudos y buñuelos.

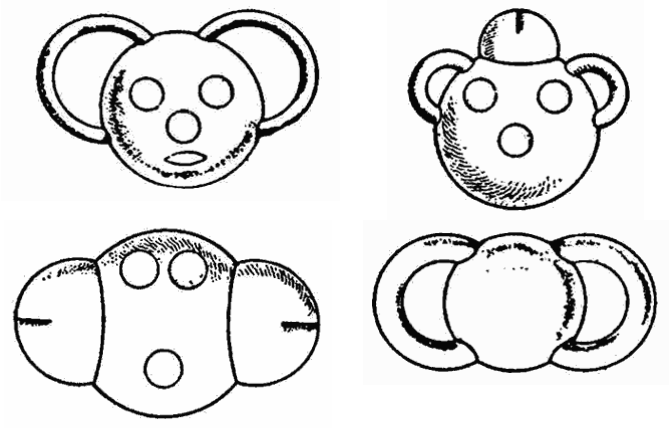


Fig. 97(a, b, c, d). Estas raras figuras no son ni creaciones de Walt Disney ni las impresiones de Picasso sobre el divino género humano, sino tema de serias lucubraciones matemáticas en Princeton.

La rosquilla es un objeto de interés, no sólo por sus propiedades gastronómicas, sino también por las topológicas. Es un ejemplo de una variedad de dos dimensiones que no *obedece* al teorema de Jordán, puesto que se cruza a sí misma. Pero este tipo de rosquilla es demasiado difícil para nuestra modesta preparación matemática. Debemos conformamos con las variedades que cumplen el teorema de Jordán y que, a pesar de ello, originan bastantes trastornos.

La figura 98 muestra un *anillo:* la parte de un plano limitada por dos círculos concéntricos. Un anillo es una figura que no es simplemente conexa ya que su frontera consiste de *dos* curvas en lugar de una. ¿Cómo podemos distinguir el interior del exterior?

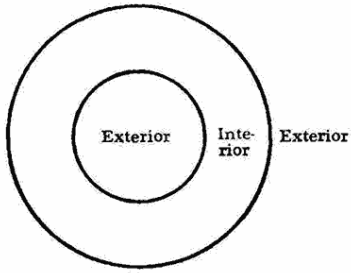


Fig. 98

Muchas de las dificultades que experimentamos al explicar y analizar los problemas espaciales surgen de las limitaciones del lenguaje reveladas por esa pregunta. Uno se siente inclinado a simpatizar con el ebrio caballero que estaba haciendo eses alrededor de una columna cilíndrica en un bulevar de París, al mismo tiempo que se lamentaba amargamente: "Por amor de Dios", preguntóle un curioso transeúnte. "¿qué es lo que le ocurre?" "Estoy emparedado", gemía el bebedor, "emparedado".

Los términos puramente relativos, tales como "interior" y "exterior", pueden confundir tanto al matemático como al melancólico caminante. El único recurso consiste en convenir en una definición formal. Viene fácilmente a la mente una analogía familiar. Todas las partes de la ciudad de Nueva York que quedan a un lado de la 5.ª Avenida son rotuladas "Este", mientras que a las que quedan del lado opuesto se las designa "Oeste".

Intuitivamente, todo el mundo conoce la diferencia que existe entre el interior y el exterior de un círculo. ¿Pero puede traducirse a términos precisos esta noción intuitiva? Ya que nadie tiene la más leve dificultad para distinguir entre izquierda y derecha, y las nociones de sentido de avance de las agujas del reloj y sentido contrario al avance de las agujas de un reloj tampoco ocasionan confusiones, podemos definir nuevamente a "interior" y "exterior", en función de izquierda y derecha, sentido de avance de las agujas del reloj y sentido

contrario al avance de las agujas del reloj. Así, por ejemplo, partiendo de la circunferencia del círculo y marchando en sentido contrario al avance de las agujas del reloj, el "interior" se define como la región que queda a la izquierda y el "exterior" como la que se deja a la derecha.

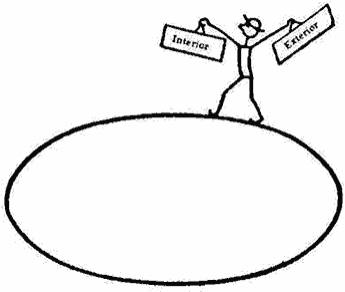


Fig. 99. El hombre marcha en sentido contrario al avance de las manecillas del reloj sobre el contorno de la curva. A la izquierda queda el interior y a la derecha el exterior.

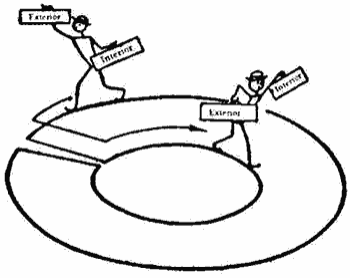


Fig. 100. Interior y exterior del anillo cortado.

La aplicación de esta definición a una variedad no simplemente conexa, tal como el anillo, requiere un ligero artificio. Cortando cualquier variedad no simplemente conexa, se la puede transformar en otra simplemente conexa.

Fig. 100(a). Una curva triplemente conexa. Necesita tres cortes para ser simplemente conexa.

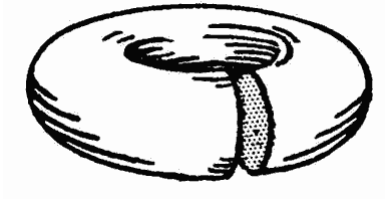
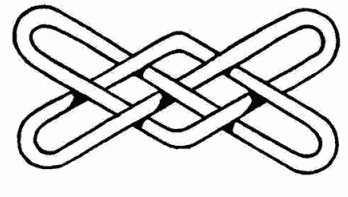


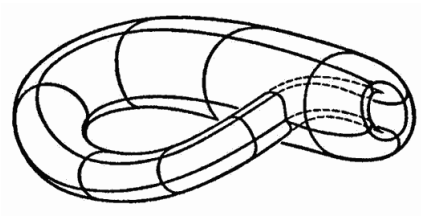
Fig. 101. La rosquilla se convierte en una salchicha.

De este modo, mientras que interior y exterior no parecen tener mucho significado en relación con el anillo (fig. 98), la simple operación de cortarlo lo transforma en una nueva variedad (fig. 100), para la cual la definición es aplicable en forma sencilla. El matemático conviene en que aquellas regiones que están "adentro" después que se corta al anillo, estaban "adentro" antes de que se cortara; y las regiones que están "afuera" después del corte, también lo estaban antes. La rosquilla presenta el mismo problema, en tres dimensiones, que el anillo en dos. "¿El orificio de la rosquilla, forma parte del interior o del exterior de la misma?" Si nos basamos por completo en la experiencia lograda en la mesa del desayuno, podríamos asegurar que el agujero es interior; pero los pocos hechos hasta aquí reunidos darían origen a algunas dudas. Se desprende que el agujero *interior* de la rosquilla es *exterior*. Por supuesto que la primera impresión no era una ilusión óptica. La conclusión de que el agujero es exterior es puramente conceptual y debe considerársele como una consecuencia lógica de ciertas definiciones.

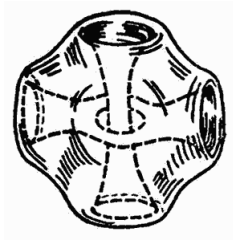
Así como en *dos* dimensiones cualquier variedad simplemente conexa es equivalente a un círculo, en *tres* dimensiones, cualquier superficie simplemente conexa, es equivalente a una *esfera.* Mediante una deformación gradual, sin rupturas, cualquier objeto de tres dimensiones, simplemente conexo, puede ser transformado en una esfera. *Una rosquilla* no se puede transformar así, de donde se deduce que *no es* simplemente conexa. Pero una operación similar a la llevada a cabo con el anillo —un simple corte— transforma a la rosquilla en una salchicha, que es simplemente conexa y es el equivalente topológico de una esfera.



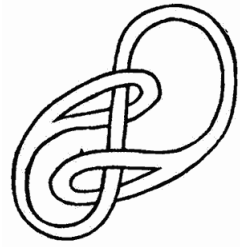
Un agujero.



A través de un agujero.



Dentro de un agujero.



Botella de Klein.

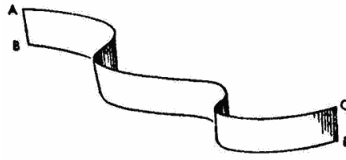
Una superficie cerrada sin interior y sin exterior.

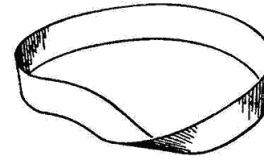
Fig. 102. Variedades topológicas rarísimas. Complicaciones derivadas de las rosquillas.

La rosquilla, junto con otros objetos que aparecen en la figura 102 son algunas de las variedades más difíciles que se estudian en topología. Ninguno de ellos es simplemente conexo y, por lo tanto, ninguno puede ser transformado en una

esfera. Pero con un número de cortes, análogos a los ejecutados en el anillo y en la rosquilla, estas complicadas variedades pueden transformarse en figuras simplemente conexas. Así, con un número suficiente de cortes, es posible transformar, aun a la rosquilla más tortuosa, en el equivalente de una esfera.

El número de cortes necesario para efectuar dicha transformación no depende de la casualidad, sino que está perfectamente determinado y depende del orden de conexión de la variedad. Puede formularse una regla general, que se aplicará tanto a los objetos fantásticos como a los fáciles. Como en todas las investigaciones matemáticas, sólo dicha regla revelará el principio fundamental. Consecuentes con ello, los topólogos no se detienen ante la consideración de las variedades de tres dimensiones, por complicadas y prohibitivas que sean, puesto que van más allá de los límites de la imaginación e idean teoremas válidos aun para rosquillas de *n dimensiones.*





Figs. 103, 104. La cinta de Moebius —una superficie unilátera y bilátera.

Una de las curiosidades de la topología es la cinta de Moebius, que se construye muy fácilmente. Tómese un rectángulo de papel, alargado, *ABCD* (fig. 103), retuérzasele media vuelta y únanse sus extremos de manera que *C* caiga en *B* y *D en A* (fig. 104). Ésta es una superficie *de un solo lado;* si un pintor conviniese en pintar solamente un lado de la misma, su sindicato se interpondría, puesto que al pintar un lado estaría, en realidad, pintando los dos.[135] Si la faja no hubiese sido retorcida antes de pegar los extremos, hubiera resultado un cilindro —que es, evidentemente, una superficie

[135] Osgood. *Advanced Calculus.*

de dos lados. Sin embargo, la media vuelta eliminó uno de los lados. ¿Increíble? Usted puede convencerse de ello. Trace una línea recta a lo largo del centro de la cinta, continuándola hasta volver al punto de partida. Separe ahora los extremos de la cinta y verá que *ambos lados* han sido recorridos por la línea recta aun cuando, al trazarla, usted no cruzó ninguno de sus bordes. Si usted hubiese seguido este mismo procedimiento con un cilindro, habría tenido que cruzar so*bre el borde* para pasar de uno a otro lado. Aunque todos los dictados del sentido común indican que la cinta, con la media vuelta, tiene dos bordes que le sirven de contorno, hemos demostrado que sólo tiene uno, por cuanto dos puntos cualesquiera de la cinta de Moebius pueden ser unidos con tan sólo partir de un punto y trazar la trayectoria hasta el otro sin levantar el lápiz o sin atravesar con él, borde alguno.

Hay mucho de divertido e interesante en esta cinta.

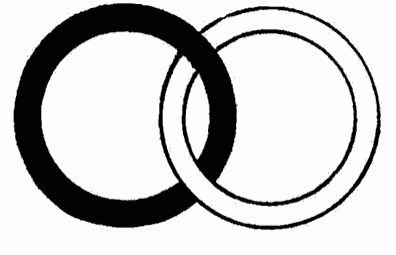


Fig. 105

Cuando usted haya estudiado las propiedades descritas, córtela por la mitad con unas tijeras, a lo largo de una línea trazada por el centro. ¡El resultado será sorprendente! Y usted puede continuar, doblando y cortando algunas veces más, para obtener nuevas sorpresas.

Dos anillos de hierro unidos en la forma indicada en la figura 105 no pueden ser separados a menos que se rompa uno de ellos. Pero siendo esto perfectamente evidente, ¿cómo lo demostraremos? Antes de que se inventara la topología ninguno de los recursos de las matemáticas se adaptaban para esa

tarea. Sólo la creación de recursos especiales hizo posible dar una demostración analítica de un hecho tan evidente.

Aquí hay un problema similar. Ate un trozo de cordel a sus muñecas. Ate otro a las muñecas de un compañero de tal manera que enlace al primero (fig. 106).

¿Piensa usted que puede separarse de su compañero sin romper la cuerda? Aunque *se parece* al problema de separar los dos anillos, que llegamos a la conclusión de que era imposible, esta hazaña, en cambio, puede llevarse a cabo. Inténtelo.

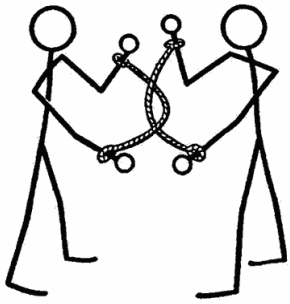


Fig. 106

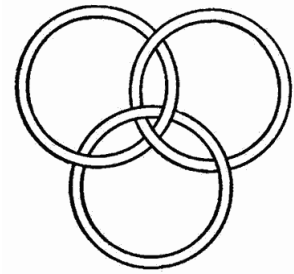


Fig. 107. Ésta es la marca de fábrica de un conocido cervecero. Los tres anillos tienen entre sí esta extraña relación. Si se retira uno de los anillos los otros dos quedan libres. *De este modo, dos anillos cualesquiera no están unidos, pero los tres, sí.* Dicho de otra manera, los anillos no están unidos dos a dos pero cada uno sostiene a los dos restantes.

Con un topólogo y un par de tijeras a mano (en previsión de accidentes), puede usted tratar de sacarse el chaleco *sin quitarse ¡a chaqueta.* No se requiere ninguna cuarta dimensión. Recuerde simplemente las condiciones del problema. La chaqueta puede estar desabotonada, pero en ningún momento, durante la remoción del chaleco, podrán salirse los brazos fuera de las mangas.

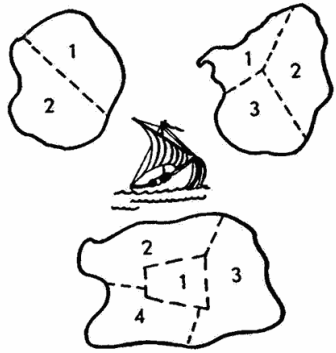
La topología es uno de los miembros más jóvenes de la familia matemática, por cuyo motivo tiene también su problema infantil. Mientras algunos matemáticos se han contentado con dedicarse a las rosquillas, nudos y rosquillas del *analysis situs,* un bando determinado de matemáticos pediatras, ha enfocado exclusivamente su atención al Problema de los Cuatro Colores. Por breve tiempo, en el siglo XIX, se pensó que el niño había sido curado y su problema resuelto, pero estas esperanzas fueron vanas y el problema de los cuatro colores continúa desconcertando a los más distinguidos topólogos.

En una época o en otra, todos hemos tenido cierta experiencia en colorear mapas. Los mapas que representaban el Santo Imperio Romano, los estados algodoneros del sur antes de la Guerra de Secesión o la organización de Europa por el Tratado de Versalles, son penosamente delineados todos los días en la escuela. Recientemente, este asunto se ha tornado más agitado que nunca. Debe tenerse siempre a mano gruesos lápices de colores y una buena goma. Pronto descubren los estudiantes, en su curso de cartografía, que si se va a colorear un mapa, para los países que tienen fronteras comunes, tales como Francia y Bélgica, deben emplearse colores distintos a fin de poderlos distinguir de una ojeada. La generalización de esa idea condujo a la pregunta: "¿Cuántos colores son necesarios para pintar un mapa, con cualquier número de países, de manera que dos estados adyacentes no tengan el mismo color?" Este problema ha trastornado a los cartógrafos durante muchos años.

La figura 108 representa una isla. Cada uno de los dos países es dueño de una parte de ella. Para este mapa se necesi-

tan tres colores —uno para el mar y los otros dos para cada uno de los países.

Para pintar la isla de la figura 109 se requieren cuatro colores. El mapa con más regiones, como el de la figura 110, también necesita cuatro colores. La razón no es difícil de descubrir por cuanto el país situado en el centro, marcado con 1, puede ser del mismo color que el mar sin que ello ocasione confusión alguna.



Figs. 108, 109, 110

Las figuras 111 y 112, requieren, respectivamente, tres y cuatro colores, aun cuando contienen más regiones que cualquiera de los mapas que anteceden.

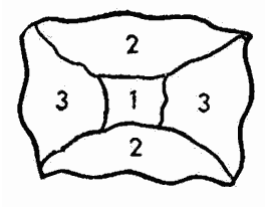


Fig. 111. Una isla que es propiedad de cinco países requiere sólo de tres colores para pintar su mapa.

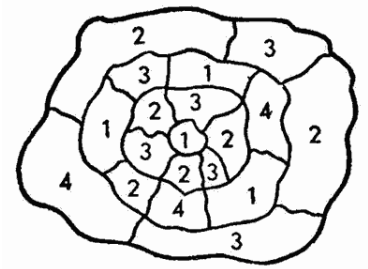


Fig. 112. Una isla con diecinueve países. Solamente bastan cuatro colores para su correspondiente mapa.

Es completamente natural suponer que a medida que el mapa se hace más complicado, al pintar más países se requerirán colores adicionales para diferenciar dos territorios adyacentes cualesquiera. Aunque parezca muy extraño, hasta ahora les ha sido imposible a los matemáticos construir un mapa para el cual no sean suficientes cuatro colores. Al mismo tiempo, nadie ha podido demostrar por medios ordinarios que cuatro colores *son suficientes* para cualquier mapa posible.

El problema del mapa de cuatro colores quedó resuelto en 1976: cuatro colores bastan. Así lo declara, ufano, el matasellos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Illinois, al que pertenecían los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quienes llevaron a cabo tal proeza. Pero la demostración de que cuatro colores son suficientes para colorear mapas planares cualesquiera, aunque es una demostración matemática, difiere mucho de las tradicionales, tanto por la enorme extensión de los cálculos requeridos, como por valerse para ejecutarlos de computadores digitales en forma que no tiene precedentes. De hecho, es materialmente imposible comprobar la veracidad de la demostración sin valerse de un computador. Más importante aún, ciertas ideas cruciales de la demostración fueron perfeccionadas mediante experimentos computarizados. Dicen Appel y Haken: "Terminamos la construcción de un conjunto inevitable de configuraciones irreducibles en junio de 1976. El teorema de los cuatro colores estaba demostrado. Habíamos utilizado 1.200 horas de funcionamiento de tres computadores distintos"... "Para desarrollar el procedimiento fue preciso examinar manualmente unos 10.000 entornos de vértices de carga positiva y analizar, mediante máquina, más de 2.000 configuraciones. Considerable parte de este material, incluida la reducción de 1.428 configuraciones, fue utilizada en la demostración final. Y aunque el procedimiento de descarga (sin las reducciones) puede ser revisado manualmente en un par de meses, sería virtualmente imposible comprobar los cómputos de reducción en esta forma."

Los modernos computadores de alta velocidad habían sido utilizados ya para trabajos matemáticos de carácter numérico, por ejemplo, el cálculo de millones de cifras del número π, o la verificación del carácter primo de ciertos números muy grandes, tales aplicaciones no pasaban de ser aplicaciones de métodos y algoritmos bastante breves, cuyo análisis teórico entraba de lleno dentro de la capacidad intelectual humana. No había en ello discontinuidad con la concepción tradicional de demostración matemática. Hacia finales del siglo pasado, los matemáticos habían logrado construir potentes teorías con las que resolvieron multitud de difíciles cuestiones. Se fortaleció la creencia de que toda cuestión formulable en lenguaje matemático podría llegar a ser matemáticamente resuelta creando conceptos nuevos lo suficientemente potentes. Se creía además, que un matemático competente podría revisar por sí mismo las soluciones en un tiempo razonable. El problema de los cuatro colores era una de tales cuestiones. Si no había sido resuelto aún era por no haberse creado el instrumental matemático adecuado.

Pero la decimonónica fe en la completitud de las matemáticas quedó conmocionada en el decenio de 1930, en razón de ciertos descubrimientos en la lógica formal. Entre otras cosas, quedó demostrado que el sistema lógico en apariencia más natural, el de la aritmética ordinaria, contenía enunciados verdaderos cuya veracidad no puede ser demostrada dentro del sistema. Hay, además, teoremas de enunciados breves, pero cuyas demostraciones son tan largas que sería imposible consignarlas en tiempos razonables. Dificultades similares surgieron, hacia 1950, en otras ramas de las matemáticas. No faltaron quienes empezasen a conjeturar que el teorema de los cuatro colores pudiera ser uno de esos teoremas tan imposibles de demostrar como de refutar. Otros especialistas opinaron que de existir una demostración, sería imposible presentarla, por su enorme longitud.

Sabemos ahora que existe una demostración. Pero lo que no sabemos (y tal vez no lleguemos a saber nunca) es si existe

una demostración que sea elegante, concisa, y completamente comprensible por una mente matemática *humana*.

Appel y Haken están convencidos de que existen teoremas de gran interés matemático que sólo podrán demostrarse por medios computarizados. Y aun cuando el teorema de los cuatro colores no fuera uno de ellos, sí es buen ejemplo de lo que podría hacerse para demostrar los que sí lo fueran. De no existir ninguna demostración breve del teorema de los cuatro colores, habría nacido una nueva categoría de teoremas, que podrían llamarse "intrínsecamente complejos", teoremas que carecen de demostración en el sentido tradicional.

Y aunque resulte paradójico, se han dado demostraciones breves para superficies mucho más complicadas, tales como el toro (la rosquilla) y la esfera con asas.

A. B. Kempe, matemático y abogado inglés, autor de un célebre librito que llevaba el provocativo título *"Cómo trazar una línea recta*", ofreció en el año 1879 una demostración de que cuatro colores eran tanto necesarios como suficientes para pintar cualquier mapa sobre una esfera. Desgraciadamente, hoy se sabe que la demostración de Kempe contenía un error lógico fatal.

Que cinco colores son suficientes para dibujar cualquier mapa sobre una esfera, o sobre un plano, es, en sí mismo, notable y vale la pena ver por qué. La demostración se basa en el aún más notable teorema de Euler sobre sólidos simplemente conexos que establece: que la suma de los vértices más las caras de cualquiera de dichos sólidos, es igual a la suma de las aristas más 2:

$$V+C = A+2$$

El teorema de Euler constituye la más simple proposición universal sobre los sólidos. La idea fundamental le era familiar a Descartes, pero muy probablemente su demostración le era desconocida a Euler.

Sabemos que cualquier sólido de tres dimensiones, simplemente conexo, es topológicamente equivalente a una esfera. De este hecho y del teorema de Euler surge una interesante

consecuencia: Considérese un cubo hueco, hecho de goma. Está limitado por seis caras, doce aristas y ocho vértices. Inflemos este cubo hasta que parezca una esfera. Las caras del cubo serán entonces regiones de la esfera y sus aristas los límites de estas regiones. Los vértices serán los puntos donde se encuentran tres regiones. Se ve entonces que el ejercicio de colorear la esfera es gobernado por el teorema de Euler; puesto que si cada región representa un país, cada línea curva, la frontera entre dos países, y cada vértice la unión de tres países, el número de éstos, más el número de puntos en los cuales concurren tres países, es igual al número de líneas divisorias más dos. De esta manera vemos cómo el teorema de Euler se hace extensivo a las figuras curvas.

Para un sólido con un agujero, tal como el toro, el teorema no se cumple. En realidad no se cumple para sólidos no simplemente conexos. Resumiendo: el teorema de Euler se aplica en topología *solamente* cuando cada una de las caras de las figuras es simplemente conexa y toda la figura también lo es.

Entre quienes han hecho contribuciones esenciales a la topología, el holandés L. J. Brouwer es uno de los más famosos. Particularmente en la teoría de los conjuntos de puntos, los teoremas topológicos de Brouwer han demostrado ser de señalada importancia. Pero no es de sus contribuciones técnicas de las que aquí nos ocuparemos. En el año 1910 publicó un problema basado en una idea del matemático japonés Voneyama que sirve de hermoso ejemplo acerca de las dificultades y sutilezas de la topología. La solución de este problema quizá no le deje satisfecho, pero no por ello dejará de desafiar a su imaginación.

La figura 113 es un mapa de tres países. Los puntos señalados con 1 y 2 son un tanto singulares, porque en cada uno de ellos se encuentran los tres países. Manifiestamente, dichos puntos son raros en cualquier mapa, no importa cuán complicado sea, pues no hay muchos casos geográficos de tres naciones que se toquen en un solo punto. Pero aun cuando hubiese muchos de esos puntos, si fuese un mapa muy extraño, su número siempre sería reducido comparado con la totalidad

de puntos a lo largo de todas las líneas limítrofes. Es razonablemente cierto que un punto frontera, elegido al azar, en *cualquier* mapa, será el punto de unión de, a lo sumo, dos países.

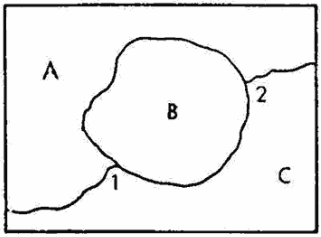


Fig. 113. Los puntos 1 y 2 son comunes a los tres países *A, B, C.*

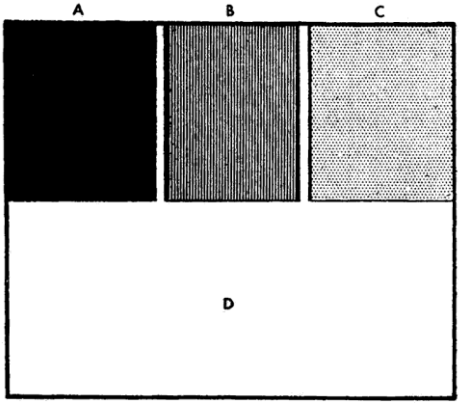


Fig. 114. Los países *A,* S y *C* están separados por corredores no ocupados y D es una tierra no reclamada.

Ahora bien, Brouwer ideó un ejemplo, a primera vista completamente increíble, de un mapa de tres países, en el cual, *cada punto simple, a lo largo de la frontera de cada nación, es un punto de unión de los tres países.*[136]

[136] Aprovechamos aquí la versión del problema dada por un distinguido matemático vienes, el extinto Hans Hahn, porque es más clara y satisface más que la enunciada por el propio Brouwer.

Consideremos el mapa de la figura 114.

Las franjas que separan a cada dos naciones y toda la porción blanca del mapa, representan territorio no reclamado. De conformidad con el espíritu del *Lebensraum*[137], el país *A* decide extender su esfera de influencia sobre la tierra no reclamada, posesionándose de una porción sustancial de la misma. Para ello construye un corredor que no toca a la tierra de sus vecinos pero que no deja a punto alguno de la tierra no reclamada restante, a más de un kilómetro de algún punto del país *A* agrandado, que se ha extendido sobre el mapa tal como lo indica la figura 115.

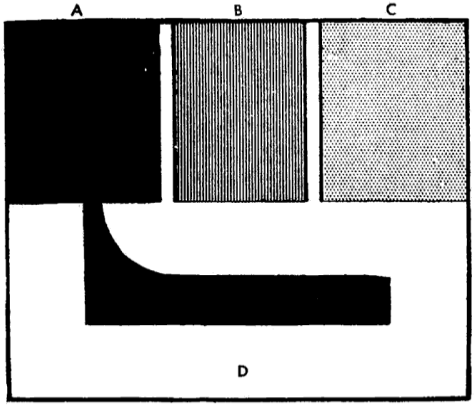


Fig. 115

El país *B*. en lugar de aplicar sanciones, decide adueñarse de otra parte antes de que sea demasiado tarde. Conteniéndose, así como teniendo en cuenta el mayor poderío de su vecino. *B* extiende un corredor a medio kilómetro de distancia de cada punto de la tierra no reclamada restante. Este corredor altera el mapa según se indica en la figura 116.

[137] El espacio vital. *(N del R)*

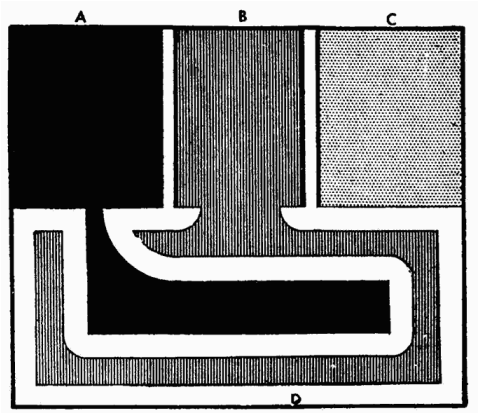


Fig. 116

Por supuesto que el país *C* no quiere quedarse atrás. Construye entonces un corredor que se aproxima a 1/3 de kilómetro a todos los puntos que quedan de la tierra no reclamada, pero, al igual que los otros dos corredores, no toca ningún otro país excepto el suyo propio. Este nuevo mapa es el que aparece en la figura 117.

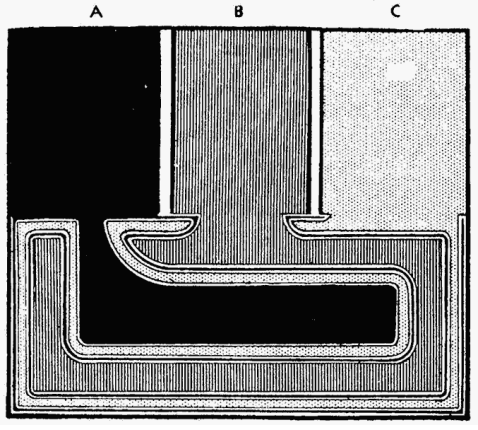


Fig. 117

Con esto, cada uno de los tres países debería sentirse plenamente satisfecho. Pero no sucede así, pues estamos sólo en el comienzo. El país *A* tiene el corredor más corto, originándose así un estado intolerable de cosas que debe remediarse *sofort*.[138] Decide entonces construir un nuevo corredor para extenderse dentro del territorio que queda, lo cual aproximará cada punto de ese territorio dentro de 1/4 de kilómetro (fig. 118).

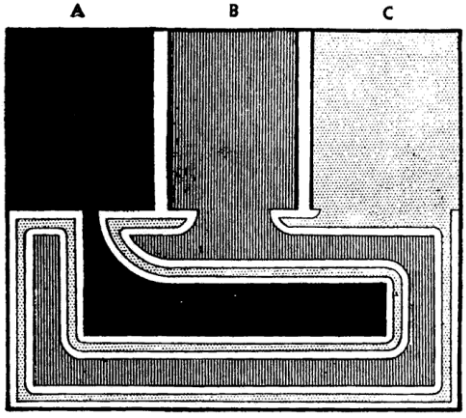


Fig. 118

El país *B* sigue su ejemplo con un corredor que se aproxima a cada punto no ocupado dentro de 1/5 de kilómetro. El corredor que entonces hace *C* viene dentro de 1/6 de kilómetro de cada punto no ocupado y el tiovivo sigue girando. ¡Más y más corredores! Jamás se establece contacto alguno entre ellos aun cuando se aproximan más y más: 1/7, 1/8, 1/9 ... 1/100 ... 1/1 000 … 1/1.000.000 … 1/gúgol de kilómetro.

Podemos suponer a fin de que este afiebrado programa se complete en un intervalo finito de tiempo (“Plan Bienal”), que la construcción del primer corredor riel país *A* llevó un año, el primer corredor de *B*, medio año, el primer corredor de *C*, un trimestre, el segundo corredor de *A* un mes y medio y así

[138] En seguida, en alemán *(N del R)*.

sucesivamente; cada corredor requiere exactamente la mitad del tiempo que su inmediato anterior. El tiempo total empleado, da lugar a la conocida serie:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=2$$

De este modo, al cabo de los dos años, el territorio otrora no reclamado ha sido ocupado por completo y ni un punto del mismo queda sin poseedor. Sobre cada centímetro del mismo flamea la bandera de uno de los tres países, ya sea, *A*, *B o C*.

¿Qué pasaría con el nuevo mapa que quisiese representar estas fronteras? Realmente resulta imposible dibujarlo, pero supongamos que tratamos de concebir qué aspecto presentaría. Este mapa conceptual está constituido por partes de matemáticas serias y fantasía pura, puesto que *¡cada simple punto limítrofe del mapa sería un punto de encuentro no de dos, sino de los tres países!*

En un mundo evidentemente dinámico e incesantemente variable, donde la innovación es perpetua, la búsqueda de cosas que no cambian constituye uno de los principales objetivos de la ciencia. Los filósofos, desde la época anterior a Sócrates, han estado escudriñando en busca de la esencia inalterable de la realidad. Hoy, esa es la tarea del hombre de ciencia.

En topología, así como en otras ramas de las matemáticas, ese empeño toma la forma de una búsqueda de invariantes. Repetidas veces en el transcurso de esa investigación, surge la necesidad de abandonar la intuición, de trascender los límites de la imaginación. Los invariantes de 4, 5, 6 y *n* dimensiones son puramente conceptuales. Adaptarlos a nuestras vidas, encontrarles aplicación en el laboratorio, darles forma para servirse de ellos en las ciencias aplicadas, parece imposible. Nada hay en la experiencia con qué compararlos, ni siquiera un sueño en el que pudieran representar un papel.

Sin embargo, lo que los matemáticos recogen lenta y dolorosamente, poco a poco, en el fantasmagórico mundo de lo increíble, es, en realidad, una porción del mundo de cada día,

de las mareas, las ciudades, los hombres, los átomos, los electrones y las estrellas. De pronto, todo cuanto vino de un mundo de *n* dimensiones, halla aplicación en el de tres. O acaso descubrimos que, al fin y al cabo vivimos en una tierra de n dimensiones. Es la recompensa del valor, la laboriosidad, el fino y libre sentido poético e imaginativo, común al matemático, al poeta y el filósofo. Es el cumplimiento de la visión de la ciencia.

IX. CAMBIO Y MUTABILIDAD: EL CÁLCULO

La siempre giratoria rueda del Cambio *que rige a todas las cosas mortales.*

SPENSER

La gente solía creer que cuando una cosa cambia, debe estar en un estado de cambio y *que cuando una* cosa se *mueve, está en un estado de movimiento.* Hoy *se sabe que esto es un error.*

BERTRAND RUSSELL

"Todos quienes conozcan el tema, estarán de acuerdo en que las bases sobre las cuales reposa la explicación científica de la naturaleza, son inteligibles sólo a aquellos que han aprendido, por lo menos, los elementos del cálculo diferencial e integral..." Estas palabras de Félix Klein, distinguido matemático alemán, repiten una convicción de todos cuantos han estudiado las ciencias físicas. Es imposible estimar e interpretar la interdependencia de las magnitudes físicas, por medio del álgebra y la geometría únicamente; si no se dispone más que de la simple ayuda de estos recursos matemáticos, es imposible ir más allá del más sencillo fenómeno observado. En la construcción de las teorías físicas, el cálculo es algo más que el cemento que liga los diversos elementos de la estructura, pues constituye el utensilio usado por el constructor en cada fase de la construcción.

¿Por qué esta rama de las matemáticas se adapta tan particularmente bien a la formulación precisa de los fenómenos naturales? ¿Qué virtudes pueden atribuirse al cálculo de las que no participan ni la geometría ni el álgebra?

Nuestra impresión más común del mundo, sea errónea o no, es su aspecto constantemente variable. La naturaleza, así como los artificios que hemos inventado para dominarla, parecen hallarse en un perpetuo flujo. Aun los "absolutos" —

espacio y tiempo— se contraen y se dilatan incesantemente. El día y la noche varían de continuo, explicando las vicisitudes de las estaciones. Por todas partes hay movimiento, fluctuaciones, ciclos de nacimiento, muerte y regeneración.

Por alguna extraña razón, los temas hasta aquí considerados, los muchos dominios de las matemáticas que hemos examinado, han hecho caso omiso de este dinamismo. Con excepción de la función exponencial, no hemos hablado aún de la variación de una cantidad conocida o desconocida. En realidad, hasta aquí, con nuestra preparación, no podríamos haber tratado este concepto. Afortunadamente, cada problema era esencialmente estático. Las geometrías de cuatro dimensiones y las no euclidianas trataban configuraciones inalterables; los rompecabezas y las paradojas se resolvían con ayuda de la inventiva, la lógica y la estática aritmética; la topología buscaba los aspectos invariantes de las formas geométricas, independientes del tamaño y de la forma, y los conceptos desarrollados en los capítulos referentes a PIE, el gúgol y la probabilidad, con una o dos excepciones, estaban exentos del ingrediente "cambio". La conclusión es, pues, inevitable: hemos olvidado al único medio indispensable para atacar la enorme mayoría de los problemas; en otras palabras, nuestra investigación se ha limitado a aspectos periféricos de la escena del mundo.

La palabra "cálculo", que significó originalmente una piedrecilla o guijarro, ha adquirido una nueva connotación. El cálculo puede ser considerado como aquella rama de la investigación matemática que trata del *cambio* y de la *razón de cambio.* La comodidad con la que se viaja en un automóvil, es posible en parte al menos, gracias al cálculo. Y si bien los planetas seguirían sus trayectorias sin el cálculo. Newton lo necesitó para demostrar que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses. Reduciéndonos de lo celestial a lo atómico, la solución de la mismísima ecuación usada por Newton para describir el movimiento de los planetas, determina la trayectoria de una partícula alfa que bombardea un

núcleo atómico[139] Por medio de la fórmula que relaciona la distancia recorrida por un cuerpo en movimiento, y el tiempo transcurrido, el cálculo permite determinar la velocidad del cuerpo, así como su aceleración en cualquier instante.

Todos los ejemplos que anteceden, sean sencillos o complejos, implican cambio y rapidez de cambio. Sin su exacta enunciación matemática, ninguno de los problemas descritos tendría sentido y mucho menos podría ser resuelto. De esta manera, se ha creado una teoría matemática que toma conocimiento de los cambios inmanentes y omnipresentes del tema bajo estudio y emprenden su examen y explicación. Esa teoría es el cálculo diferencial.

Pero, ¿no habíamos declarado antes, casi fervientemente, que vivimos en un mundo inmóvil? ¿Y no habíamos demostrado extensamente, empleando las paradojas de Zenón, que el movimiento es imposible, que la flecha en vuelo se encuentra realmente en reposo? ¿A qué atribuiremos este aparente cambio de posición?

Además, si cada nueva invención matemática se basa en fundamentos establecidos desde mucho antes, ¿cómo es posible extraer de las teorías del álgebra y la geometría estáticas, una nueva matemática capaz de resolver problemas que impliquen entidades dinámicas?

En cuanto a lo primero, no ha habido cambio en nuestro punto de vista Estamos todavía firmemente aferrados a la creencia de que éste es un mundo en el que el movimiento, así como el cambio, son casos especiales de un estado de reposo. No hay estado de cambio, si cambio implica un estado cualitativamente distinto del reposo: lo que distinguimos como cambio es simplemente, según señalamos ya una vez, una sucesión de muchas imágenes estáticas diferentes, percibidas en intervalos de tiempo relativamente breves. Con un ejemplo aclararemos esta idea: En el cinematógrafo, una serie de cua-

[139] Esto sólo es válido para las partículas alfa que se mueven con velocidades relativamente pequeñas.

dros estáticos se proyectan sobre una pantalla, uno después del otro, en rápida sucesión: cada cuadro difiere sólo ligeramente del que le precede y la impresión que producen es tal, que no queda la más ligera duda en la mente del más inteligente espectador, de que se ha representado un movimiento en la pantalla. Una exhibición completamente convincente de cambio, se presenta por medio de una serie de imágenes completamente estáticas.

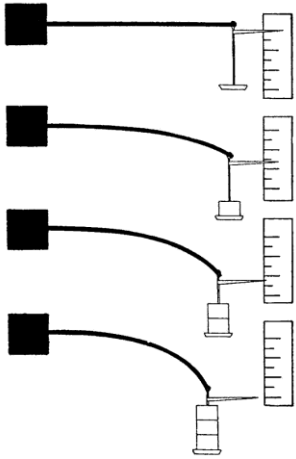


Fig. 119. Cada aumento de peso flexiona la varilla un poco más.

Sigamos esto con un ejemplo más técnico. Una varilla de acero, fijada por un extremo en posición horizontal, sostiene un peso por el otro extremo. Estando este sistema en reposo, se dice que el conjunto de elementos que lo componen se encuentra en equilibrio. Si, cuando lo volvemos a examinar, después de cierto intervalo de tiempo, comprobamos la misma disposición, la varilla flexionada de la misma cantidad, es evidente que no ha habido cambio. Sin embargo, si observamos una nueva posición de la varilla, habrá tenido lugar, evidentemente, una alteración: es decir, un cambio. Es verdad que el equilibrio sólo podría haber sido perturbado, alterando la posición de la varilla, por un cambio que se hubiese opera-

do en el peso que sostiene. No es difícil convencemos de que un peso adicional habría flexionado más la varilla y que dichas adiciones, hechas gradualmente, y en forma rápida como los cuadros en movimiento que se proyectan en la pantalla, nos habrían producido la impresión de que la varilla está animada de un movimiento Por otra parte, si estamos enterados de estas adiciones de peso, llegamos a la conclusión de que lo que realmente hemos observado no es un movimiento sino simplemente una correlación entre la magnitud de la flexión y el grado del peso y que, para distintos pesos, corresponden diferentes posiciones de la varilla.

Intuitivamente convencidos de que hay continuidad en el comportamiento de un cuerpo en movimiento, ya que no vemos realmente a la flecha en vuelo pasar por cada punto de su trayectoria, hay una inclinación irresistible a abstraer la idea de movimiento como algo esencialmente distinto del reposo. Pero debe buscarse el origen de esta abstracción en las limitaciones fisiológicas y psicológicas pues no se encuentra, en modo alguno, justificada por el análisis lógico. El movimiento es una correlación de posición con tiempo. El cambio es simplemente otro nombre para designar una *función*, otro aspecto de esa misma correlación.

En cuanto a lo demás, el cálculo, como descendiente de la geometría y del álgebra, pertenece a una familia estática y no ha adquirido característica alguna que ya no poseyeran sus progenitores. Las alteraciones no son posibles en las matemáticas. De este modo, inevitablemente, el cálculo tiene las mismas propiedades estáticas que la tabla de multiplicar y la geometría de Euclides. El cálculo no es sino otra interpretación, aunque debe admitirse que muy ingeniosa, de este mundo inmutable.

El desarrollo histórico del cálculo no siguió un método claro. Las discusiones filosóficas sobre el significado de ese tema sólo vinieron una vez que se hubo demostrado, indiscutiblemente, su utilidad. Con anterioridad a eso, los filósofos no se habrían dignado considerar que valiera la pena atacarlo.

Desgraciadamente no podemos relatar (aunque sería muy divertido) las trampas que cada filósofo y matemático analista, desde Newton hasta Weierstrass, cavaba para sus adversarios y en las que prontamente caía él mismo. Podemos, sin embargo, describir a grandes rasgos, los pasos que precedieron a la teoría, tal cual se la acepta hoy en día.

El cálculo no difiere de otras teorías matemáticas; no surgió completamente desarrollado de la mente de un solo hombre. Más bien se desarrolló en base a la consideración de numerosos problemas ensayados y resueltos con éxito por los predecesores de Newton y Leibniz. "Cada gran época en el progreso de la ciencia, va precedida por un período de preparación y previsión... Las ideas que entraron en acción en esa gran época, habían estado en preparación desde largo tiempo antes[140]."

El advenimiento de la geometría analítica proporcionó un poderoso estímulo a la invención del cálculo, puesto que la representación gráfica de una función reveló muchas características importantes. Kepler ya había notado que, a medida que una cantidad variable se aproxima a su valor máximo, su razón de cambio se hace menor que en cualquier otro valor. Continúa disminuyendo hasta que, para el valor máximo de la variable, su razón de cambio es nula.

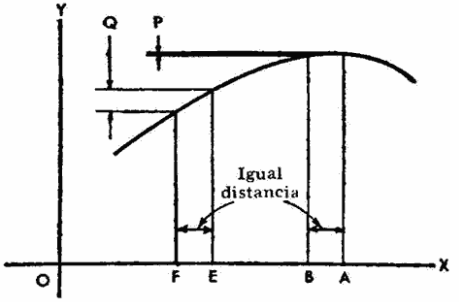


Fig. 120. La razón de cambio de una cantidad variable es más pequeña en el punto máximo que en cualquier otra parte.

[140] Cajori. *History of Fluxions.*

En el diagrama de la figura 120, los valores que toma una cantidad variable se miden por la distancia comprendida entre una línea recta (el eje de las *x*) y la curva. El valor máximo de la cantidad variable (la distancia máxima desde eje *x* a la curva), se alcanza en el punto señalado con *A*: al moverse levemente, ya sea a la derecha o a la izquierda de *A*, por ejemplo al punto *B*, el cambio en el valor de la cantidad variable es muy pequeño y está medido por *P*. Si nos movemos a la derecha o a la izquierda de algún otro punto E con la misma amplitud en que nos movimos de *A* a *B*, de manera que la distancia *EF* sea igual a la distancia *AB*, el cambio en el valor de la cantidad variable, en la vecindad de *E*, está medido por *Q*. Pero evidentemente, esta segunda anchura *Q*, es mayor que la primera P. En esto, que es contribución de Kepler, tenemos un ejemplo geométrico del principio de los máximos y mínimos: la tasa de variación de una cantidad variable es más pequeña en las cercanías de su valor máximo (o mínimo) que en cualquier otra parte. En efecto, en los valores máximos y mínimos, dicha razón de cambio es nula.

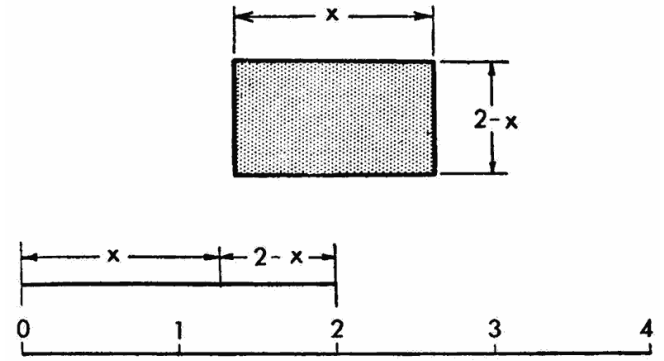


Fig. 121. Usando la escala, el perímetro del rectángulo es, evidentemente, igual a 4 unidades.

Pierre de Fermat, que comparte, con Descartes, del honor de haber descubierto la geometría analítica, fue uno de los primeros matemáticos que ideó un método general aplicable a

la solución de problemas que implican máximos y mínimos. Su método, que usó ya en 1629, es sustancialmente el mismo que hoy se aplica a problemas de este tipo. Se pide dibujar un rectángulo tal, que la suma de sus lados sea cuatro pulgadas y que su área sea máxima[141]. Si llamamos x a un lado del rectángulo máximo, el lado adyacente, como se verá en la figura 121 será $2–x$: y el área del rectángulo será: $x\ (2–x)$. Si el lado x aumenta en un pequeño incremento E, el lado $2–x$ tendrá que disminuir en E a fin de que el perímetro se mantenga constante. La nueva superficie será entonces: $(x+E)(2–x–E)$. Ya que el área original era máxima, esta ligera alteración en la relación de los lados puede haber producido sólo un ligero cambio en el área. Así, considerando las dos áreas *aproximadamente* iguales, tenemos:

$$x\ (2–x) = (x+E)(2–x–E).$$

de donde: $2x–x^2 = 2x–x^2–Ex+2E–Ex–E^2$

Restando: $2x–x^2$ de ambos miembros de esta ecuación y factorizando:

$$0 = 2E–2Ex–E^2$$

$$0 = E\ (2–2x–E)$$

Pero E *no* es igual a cero, por lo tanto el otro factor $(2–2x–E)$ debe ser igual a cero:

$$0 = 2–2x–E.$$

A medida que se toman para E valores más y más pequeños (es decir, a medida que el rectángulo modificado se aproxima más y más al rectángulo máximo original), la expresión situada a la derecha de la ecuación se acerca más y más a la expresión que se obtiene haciendo $E = 0$, o sea $2–2x$. Resolviendo esta ecuación:

$$0 = 2 – 2x$$

[141] El área de un rectángulo está dada por el producto de dos lados adyacentes.

encontramos que: $x = 1$: o, en los términos del problema original: el rectángulo de área máxima es un cuadrado.

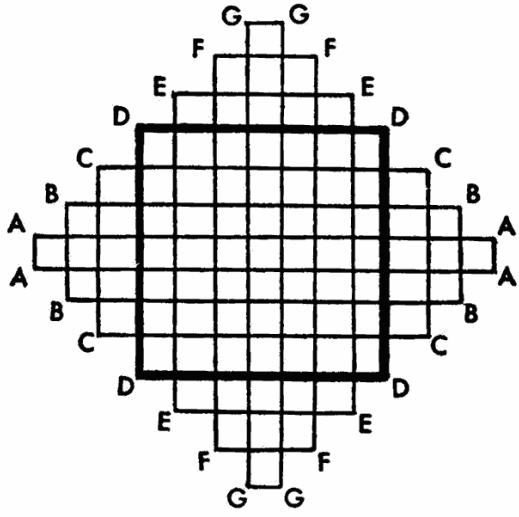


Fig. 122. El perímetro de cada uno de los siete rectángulos: *AAAA, BBBB, CCCC*, etc., es el mismo. Pero, evidentemente, el rectángulo de área máxima es el cuadrado *DDDD.*

Es conveniente notar que el área del rectángulo es una función de las longitudes de los lados y que esta función puede representarse gráficamente mediante una curva (figura 123).

El punto más alto de esta curva se encuentra en $x = 1$ Éste es el *máximo* de la función Para emplear una analogía aproximada, podemos suponer que ya que este punto no está ni "cuesta arriba" ni "cuesta abajo", una bola de acero se mantendría en equilibrio, o bien podría una regla sostenerse horizontalmente, apoyándose en ese punto. Si imaginamos una línea recta, "que se mantiene en equilibrio en este punto, dicha línea se conoce como la *tangente a la curva* [142]. El

[142] Repaso de trigonometría para quienes la han olvidado:
En el triángulo rectángulo que aparece a continuación, las razones trigonomé-

hecho interesante es que la tangente a la curva en sus puntos máximos y mínimos, será *siempre horizontal* (fig. 124). Volveremos más adelante a tratar este concepto, tan importante en el cálculo.

---

tricas (funciones de un ángulo) son las siguientes

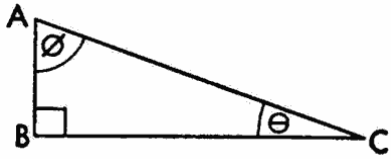


Fig. 168
Seno θ = lado AB / lado AC = Coseno ϕ
Coseno θ = lado BC / lado AC = Seno ϕ
Tangente θ = Seno θ/Coseno θ = (AB/AC) / (BC/AC) = (AB/BC) = Cotangente ϕ.
En otras palabras, las funciones trigonométricas son las razones de los lados de un triángulo rectángulo entre sí y dependen, a su vez. de los ángulos.
El concepto de *tangente* tiene aplicación inmediata en la geometría analítica y en el cálculo. En el diagrama que aparece a continuación, la *pendiente* de la recta AB es la razón P/Q. que no es otra cosa que la *tangente del ángulo* θ.

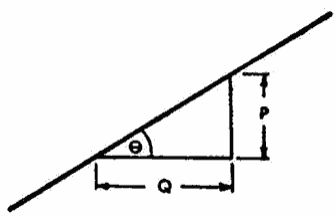


Fig. 169. La pendiente de una línea recta es la razón: P/Q.
Pero la palabra tangente tiene otro significado muy distinto del ya indicado Este nuevo significado es esencial para el cálculo infinitesimal.
Dibújese en el plano cartesiano la curva ABC. Considérense dos puntos P_1 y P_2 de esta curva, unidos por una línea recta (véase la fig. 131). A medida que P_2 se mueve a lo largo de la curva acercándose a P_1, la recta que une estos puntos se aproxima a un valor límite llamado *la tangente a la curva ABC en el punto* P_1. La pendiente de esta recta tangente en el punto P_1 es la derivada de la función, cuya gráfica es la curva ABC.

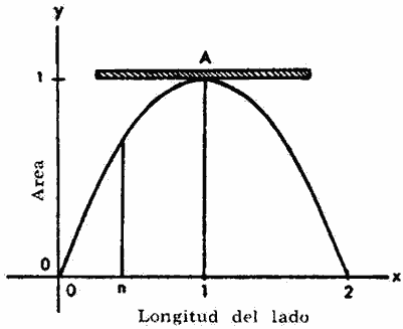


Fig. 123. Esta curva es una parábola que representa las áreas de todos los rectángulos cuyo perímetro tiene una longitud igual a 4 unidades. Levántese una perpendicular en cualquier punto *n* del eje de las *x*, que llegue hasta la curva. La longitud de esta perpendicular será el área del rectángulo, uno de cuyos lados es igual a *n*. El área máxima corresponde al punto *A* de la gráfica, es decir, a la perpendicular levantada por $x = 1$. De este modo el rectángulo de área máxima, con perímetro = 4, tiene un lado = 1 y es, por lo tanto, un cuadrado.

Sir Isaac Newton y el barón Gottfried Wilhelm von Leibniz comparten el mérito, en la historia de las matemáticas, de haber descubierto, independientemente, el cálculo diferencial e integral. Sus antagónicas reclamaciones a tal honor dieron lugar a una controversia que apasionó a Europa durante más de un siglo. Esta monumental invención, hecha simultáneamente por estos hombres, se recomienda ahora, por sí misma, a nuestra atención.

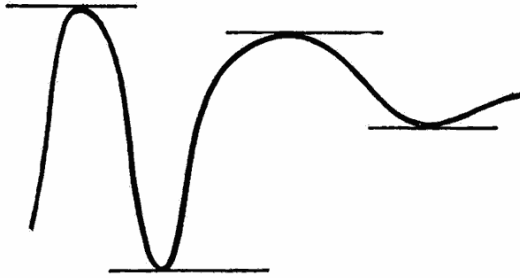


Fig. 124. Las líneas horizontales son tangentes en los máximos y mínimos relativos de la curva.

Una tenue llama, encendida por Arquímedes y sus predecesores, resplandeció con inigualable fulgor en el clima intelectualmente hospitalario del siglo XVIII, para proyectar su luz sobre todo el futuro de la ciencia. El fecundo concepto de *límite* reveló sus plenos poderes, por vez primera, en el desarrollo del cálculo diferencial.

Estamos ya familiarizados con el *límite de una cantidad variable.* La sucesión de los números 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, 0,99999 … converge al valor límite 1. La serie 1+1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+… converge al valor límite 2. Ni tampoco dejan de sernos familiares los ejemplos geométricos. Si se inscribe un polígono regular en un círculo, la diferencia entre el perímetro del polígono y la circunferencia del círculo puede hacerse tan pequeña como se quiera con sólo tomar un polígono de suficiente número de lados. La figura límite es el círculo, el área límite, el área del círculo.

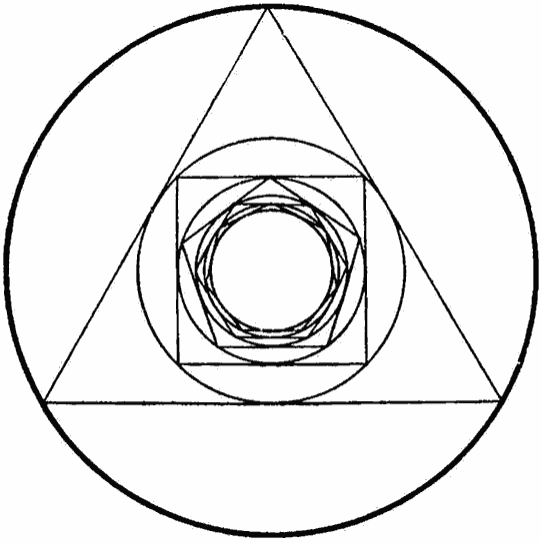


Fig. 125. Los radios, al disminuir, tienden a un límite, que es aproximadamente 1/12 del valor correspondiente al radio del primer círculo.

En estos ejemplos no hay dificultad alguna para determinar el límite; sin embargo, esto es la excepción y no la regla. Por lo general, se requieren formidables procedimientos matemáticos para determinar el límite de una cantidad variable. Consideremos esto; Trácese un círculo de radio igual a la unidad; inscríbase en él un triángulo equilátero. En este triángulo inscríbase otro círculo; en el segundo círculo, un cuadrado. Continúese con un círculo en este cuadrado y sígase con un pentágono regular inscrito en el nuevo círculo. Repítase este procedimiento, aumentando cada vez, en uno más, el número de lados del polígono regular.

A primera vista, uno podría suponer que los radios de los círculos, que van disminuyendo, se aproximan a cero como valor límite.

Pero no es así; los radios convergen a un valor límite definido, distinto de cero. Como guía explicatoria, sólo debe recordarse que el proceso de reducción mismo, se aproxima a un límite a medida que los círculos y los polígonos inscritos llegan a ser aproximadamente iguales. El valor límite de los radios está dado por el producto infinito:

$$Radio = cos\frac{\pi}{3} \times cos\frac{\pi}{4} \times cos\frac{\pi}{5} \times \ldots \times cos\frac{\pi}{(n-2)}$$

Estrechamente vinculado con este problema, es el de circunscribir los polígonos regulares y los círculos en lugar de inscribirlos.

Aquí parecería que los radios debieran crecer superando todo límite, hasta hacerse infinitos. Esto también es engañoso, puesto que los radios de los círculos resultantes se aproximan a un valor límite dado por el producto infinito:

$$Radio = \frac{1}{\left[cos\frac{\pi}{3} \times cos\frac{\pi}{4} \times cos\frac{\pi}{5} \times \ldots \times cos\frac{\pi}{(n-2)}\right]}$$

Y, lo que es bastante interesante, los dos radios límites están relacionados entre sí de tal manera que uno es el recíproco del otro.

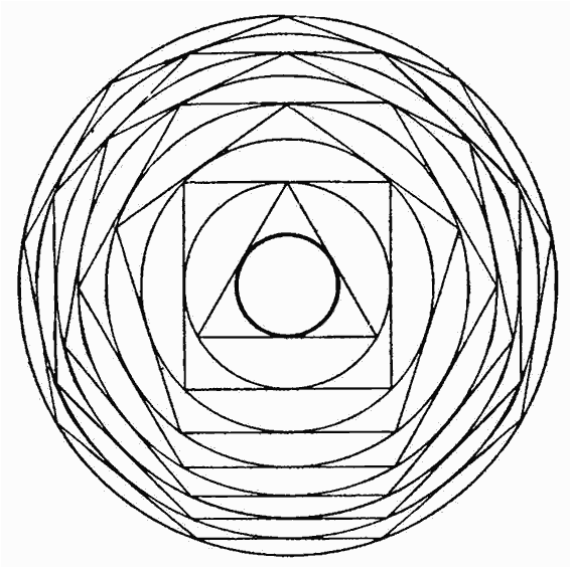


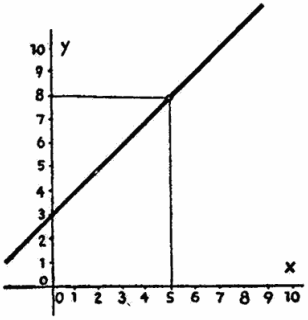
Fig. 126. Los radios, al aumentar, tienden a un límite, aproximadamente 12 veces mayor que el del círculo original.

Ya nos hemos ocupado bastante del *límite de una cantidad variable*. Vayamos ahora al *límite de una función*, recordando, someramente, el significado de función[143]. Se encuentra a menudo, que dos cantidades variables están relacionadas entre sí de tal manera que, a cada valor de una corresponde un valor de la otra. En estas condiciones se dice que las dos cantidades variables son funciones una de la otra, o que se relacionan funcionalmente. Así, la fuerza de atracción (o repulsión) entre dos imanes, es una función de la distancia que los separa. Cuanto mayor sea la distancia entre los imanes, menor será la fuerza; a menor distancia, mayor será la fuerza. Si se hace que la distancia tome valores arbitrarios, se la podrá considerar

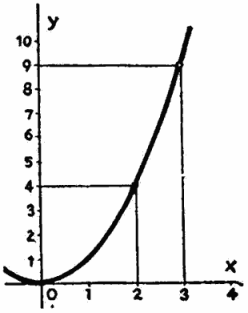
[143] Aunque esto ya lo hemos hecho antes, la noción de función es tan importante, tan frecuente su presencia en las matemáticas, que bien vale la pena volver nuevamente sobre la misma.

como una *variable independiente* La fuerza, entonces, resultará la *variable dependiente*, dependiente de la distancia (y la relación funcional) y queda determinada de manera única, asignando valores a la variable independiente. En las relaciones funcionales, la letra *x* indica habitualmente la variable independiente, en tanto que la letra y, la variable dependiente. La dependencia *"y* es una función de *x*", se escribe simbólicamente:

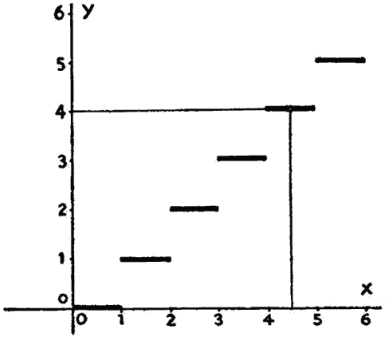
$$y = f(x)$$



$y = f(x) = x + 3$
Si $f(5) – 5 + 3 = 8$



$y = f(x) = x^2$
$f(2) = 2^2 = 4$
$f(3) = 3^2 = 9$



$y = f(x)$ = el mayor número entero menor que x
$f(4½) = 4.$

Fig. 127. Representaciones de tres funciones diferentes

La representación gráfica de un punto ha sido ya tratada en el capítulo sobre *geometría analítica.* La ecuación: $y = f(x)$ determina un valor de y para cada valor de x. Cada par de valores que satisfaga esta ecuación se considera como las coordenadas cartesianas de un punto en un plano; la curva que representa la función está compuesta de todos esos puntos. Al discutir el concepto de "límite de una función", estudiemos específicamente la función: $y = 1/x$ representada gráficamente en la figura 128.

El valor de la función en el punto x es $y = f(1/2) = 2$. Este valor está representado gráficamente por la distancia que media entre la curva y el eje de las x y a 1/2 unidad a la derecha del origen. Análogamente, el valor de la función en cada punto, a lo largo de la curva, está representado por su distancia desde el eje de las x.

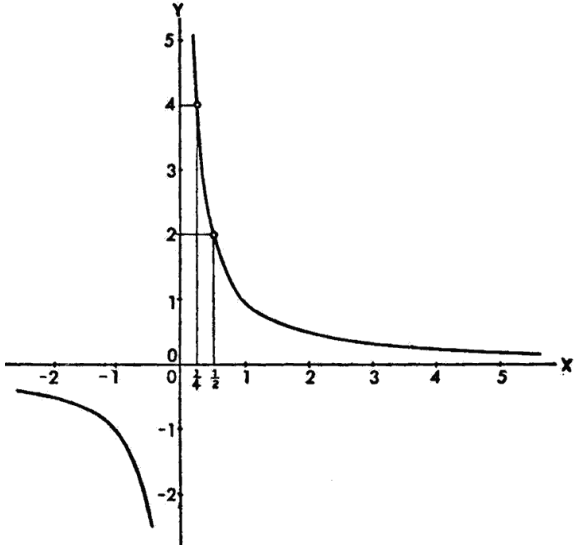


Fig. 128. Gráfica de la función $y = 1/x$.

Para la función: $y = 1/x$, tómense dos puntos vecinos, $x = 1/4$ y $x = 1/2$. A medida que la variable independiente se

mueve a lo largo del eje de las x, desde el punto $x = 1/4$ hasta $x = 1/2$, "obliga" a la variable dependiente, a lo largo de la curva, desde el punto $y = f(1/4) = 4$ hasta $y = f(1/2) = 2$. En otras palabras, a medida que la variable independiente x se acerca al valor 1/2, considerado como límite, la variable dependiente —la función— se aproxima al valor 2, como límite. Generalizando, a medida que una variable independiente *x se aproxima* a un valor *A*, su variable dependiente *y* (la función de x) *se aproxima* a un valor *B.* De este modo, el límite de $f(x)$, a medida que x se acerca al valor de *A*, es *B*. Esto es lo que significa el "límite de una función".

Recordando el ejemplo de la varilla de acero flexionada por el peso, podemos construir un diccionario paralelo de términos:

MATEMÁTICAS	**FÍSICA**
Variable independiente, x.	Magnitud del peso.
Variable dependiente, y.	Cantidad que se ha curvado la varilla de acero.
Función es la relación entre x y y.	Función es la relación entre el peso y la cantidad que se ha curvado la varilla.
Aumento o disminución de x (es decir: cambio).	Adición o disminución de peso (es decir: cambio).
Aumento o disminución de y (es decir: cambio).	Aumento o disminución en la cantidad que se ha curvado la varilla de acero (es decir: cambio).
Valor límite de y (la función de x) igual a un número.	Valor límite del grado de curvatura (función del peso) igual a la posición.

Teniendo presentes los conceptos de límite, función y límite de una función, queda por definir una idea que comprende a las tres: la de "razón de cambio", o "tasa de variación".

Consideremos la determinación de la rapidez[144] de un cuerpo que se mueve en un instante dado. Se arroja una bom-

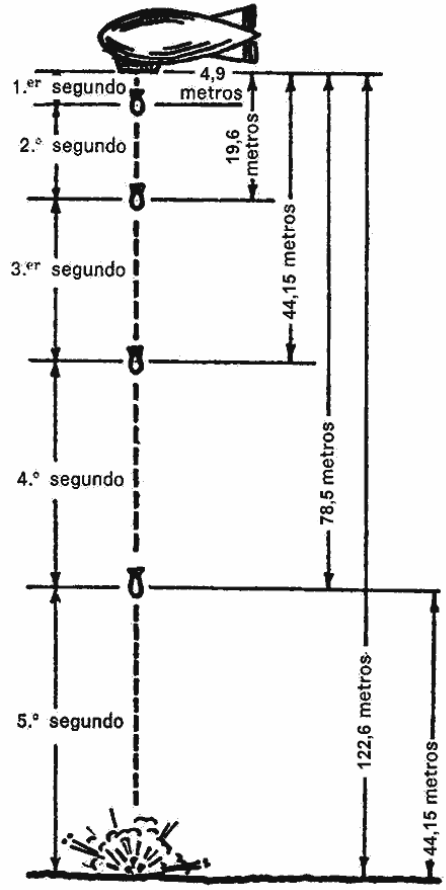
[144] Con justificaciones al físico por el uso del término *rapidez* en lugar del término, técnicamente más correcto, de "*velocidad*".

ba desde una aeronave estacionaria a una altura de 122,625 metros. Cuando llega al suelo han transcurrido cinco segundos. Su rapidez media es, pues, 122,625 metros/5 s = 24,525 metros por segundo. En consecuencia, el promedio de la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo, es 24,524. Pero sabemos, sin embargo, de acuerdo a los más elementales conocimientos de física, que un cuerpo adquiere mayor velocidad a medida que cae.

Intervalo de tiempo en s (Finales)	**Distancia recorrida en metros**	**Velocidad media en metros/s**
1	78,48000	39,24000
1/2	99,32625	44,14500
1/4	110,66906	46,59750
1/8	116,57039	47,82375
1/16	119,37680	48,39600
1/32	120,99545	48,72300
1/64	121,80886	48,88650
1/125	122,23291	48,97152
1/1.250	122,42888	49,01076
1/12.500	122,52692	49,03038

Mientras cae, la bomba no se mueve a una velocidad constante de 24,525 metros por segundo; la rapidez de su caída varía de punto a punto, aumentando en cada instante sucesivo (despreciando la resistencia del aire). Supongamos, para mayor facilidad, que nos limitamos a considerar la velocidad de la bomba en el preciso momento de chocar contra el suelo. Evidentemente, su velocidad durante el último segundo constituirá una razonable aproximación de la que posee en el instante del choque. La distancia cubierta durante este último segundo es de 44,15 metros, y la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo es 44,15. Si ahora tomamos intervalos de tiempo cada vez menores, podemos obtener aproximaciones más y más ajustadas a la velocidad del proyectil en el momento del impacto. En el último medio segundo, la distancia recorrida fue de 23,3 metros, de modo que la velocidad llegó a ser de 44,145 metros por segundo. En la

tabla anterior se consignan los intervalos de tiempo, la distancia recorrida en esos intervalos y la velocidad media en cada uno de ellos. Se ve fácilmente que a medida que el intervalo se acerca a cero obtenemos la aproximación a la velocidad del cuerpo en el instante en que golpea en el suelo.



4.5

Fig. 129. El dibujo muestra la distancia recorrida por un proyectil que cae, al final del 1°, 2°, 3°, 4° y 5° segundos.

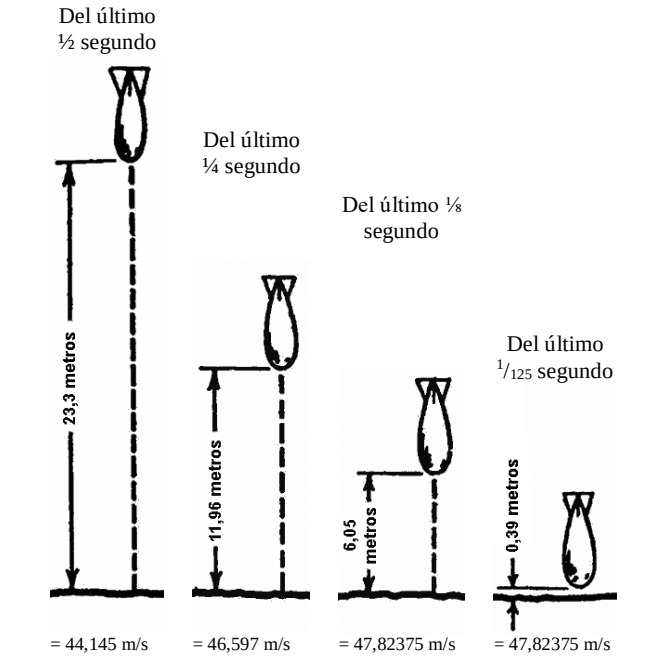


Fig. 130

Estas aproximaciones se acercan al valor límite de 24,525 metros por segundo, que se define como la *velocidad instantánea* de la bomba al tocar la tierra, o, lo que es lo mismo, su razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo en ese instante.

Podemos tratar el mismo ejemplo desde un punto de vista algebraico. La distancia recorrida por un cuerpo que cae, está dada por la función: $y = 4{,}905\ x^2$ [145], en la cual y es la distancia y x es el tiempo transcurrido. Partiendo de esta fórmula, con sólo sustituir 5 (segundos) en lugar de x, hallamos que y

[145] En esta fórmula el valor de la aceleración de la gravedad está expresada en m/s^2, de manera que en lugar de la conocida función $y = ½\ gx^2 = ½\ 9{,}81\ (m/s^2)\ x^2 = 4{,}905\ (m/s^2)\ x^2$ resulta $y = 4{,}905\ x^2$ *(N. del T).*

es igual a 122,62 metros. ¿Cómo haremos uso de esta fórmula para determinar la velocidad al cabo de cinco segundos? Fijaremos nuestra atención en un breve intervalo de tiempo, antes de que el objeto que cae choque contra el suelo, y en el consiguiente intervalo reducido de distancia recorrido en ese período de tiempo. Llamaremos Δx [146], a este pequeño intervalo de tiempo y Δy a la distancia recorrida en ese período. Sabiendo que el valor de Δx ha sido elegido arbitrariamente, el problema consiste en determinar el valor de Δy. Al comienzo del intervalo de la distancia, Δy, el tiempo exacto transcurrido desde que el cuerpo que cae abandonó la aeronave fue de $(5–\Delta x)$ segundos. La distancia cubierta en el tiempo $(5–\Delta x)$ segundos, es de $(122{,}625–\Delta y)$ metros. Nuestra relación funcional indica que:

$$\textit{Distancia} = 4{,}905 \times (\textit{tiempo transcurrido})^2$$

Así, para toda la caída:

$$122{,}625 = 4{,}905 \times (5)^2,$$

y para el recorrido incompleto

$$(122{,}625 - \Delta y) = 4{,}905 \times (5 - \Delta x)^2$$

que puede simplificarse así:

$$122{,}625 - 4{,}905 \times (5 - \Delta x)^2 = \Delta y$$
$$122{,}625 - 4{,}905 \times (25 - 10\Delta x + \Delta x^2) = \Delta y$$
$$\cancel{122{,}625} - \cancel{122{,}625} + 49{,}05\Delta x - 4{,}905\Delta x^2 = \Delta y$$
$$49{,}05\Delta x - 4{,}905\Delta x^2 = \Delta y$$

La última ecuación de la distancia Δy en términos de unidades de Δx. Para hallar la *velocidad media* durante todo el intervalo de tiempo Δx, debemos formar la fracción:

velocidad media = intervalo de distancia / intervalo de tiempo

o sea:

[146] Léase "incremento de *x*" y no "delta veces *x*", porque Δ es solamente un símbolo, una indicación para efectuar cierta operación, a saber, tomar una pequeña porción de *x*.

$$velocidad\ media = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{49{,}05\Delta x - 4{,}905\Delta x^2}{\Delta x}$$

Así:

$$\Delta y/\Delta x = 49{,}05 - 4{,}905\,\Delta x$$

Ahora, a medida que se reduce el intervalo de tiempo Δx, es decir al tomar aproximaciones más y más ajustadas a la velocidad en el instante en que el cuerpo toca el suelo (habiendo transcurrido cinco segundos), el límite de la relación Δy / Δx (= 49,05 – 4,905Δx), es 49,05. En otras palabras, a medida que el valor de Δx tiende a cero, la función de Δx (la expresión 49,05 – 4,905Δx) se aproxima al valor 49,05. De este modo, la *velocidad instantánea* al cabo de 5 segundos es de 49,05 metros por segundo. Indicamos que la razón Δy / Δx tiende a un límite, escribiendo este valor límite como dy/dx.

En términos técnicos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

que se lee: "El límite de $\Delta y/\Delta x$, a medida que Δx tiende a cero, es dy/dx."

Detengámonos por un instante, para no confundirnos. ¿Qué hemos logrado? Podrá parecer trivial que, con toda la compleja maquinaria a nuestra disposición, sólo hayamos conseguido averiguar la velocidad instantánea de un cuerpo que cae, en el momento en que toca la tierra. Sin embargo, si nuestro éxito es trivial, el movimiento también lo es, porque, ya sea queriéndolo o no, hemos atrapado la flecha de Zenón durante su vuelo y establecido la inmutabilidad de nuestro Universo. Con ayuda de los conceptos de límite y función, hemos hecho comprensible las nociones de cambio y de razón de cambio. *Cambio es una tabla funcional.* A medida que varía un ítem (variable independiente) en un lado de la tabla, su ítem correspondiente (variable dependiente), del otro lado, acusa una variación correlativa. La tasa de variación, es decir, la razón límite de las dos variaciones, se denomina *razón de*

cambio. Todas las extravagancias, misterios e incertidumbres indisolublemente ligadas a la idea del movimiento, se disipan de esta manera o, con más propiedad, se transforman en unos pocos aspectos precisos y definibles del concepto de función.

El límite de una función está ejemplificado muy sencillamente por la razón $\Delta y/\Delta x$ cuando Δx tiende a cero. Es fácil ver que $\Delta y/\Delta x$, es una función de Δx: en otras palabras, que esta razón es una función de la variable independiente Δx. A medida que le asignamos valores arbitrarios a Δx, su variable dependiente Ay asume un correspondiente conjunto de valores y, como hemos visto, esa razón tiende a un límite. De ello se deduce que no solamente hemos revelado el significado del límite de una función, sino que ya hemos hecho uso práctico de este concepto.

Ahora es posible definir el proceso fundamental del cálculo diferencial, calculando el límite de la razón de cambio de una función o. lo que es lo mismo, determinando su *derivada.* Pues, en efecto, la razón de cambio de una función es a su vez una función de esa función y, al obtener al límite de la razón de cambio, es decir a la derivada, llegamos al corazón de la maquinaria de nuestra función primitiva.

Supongamos que se desea determinar la variación de una función, $y = f(x)$ en un punto arbitrario x_0. El cambio promedio de la función $f(x)$ en un intervalo que se extiende desde x_0 hasta $x_0+\Delta x$ es la diferencia en el valor de la función $y = f(x)$ en los dos puntos extremos, x_0 y $x_0+\Delta x$. dividida entre la longitud entre estos dos puntos extremos $(x_0+\Delta x) - x_0$. Así:

$$y_0 = f(x_0)$$

y

$$y_0+\Delta y = f(x_0+\Delta x).$$

Por consiguiente, un cambio en una función, desde el punto de vista puramente algebraico, está dado por:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

y la *tasa de variación media de una función*, obtenida dividiendo el cambio. Δy, entre la longitud del intervalo en el cual se considera ese cambio, Δx, es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\int(x_0 + \Delta x) - \int(x_0)}{\Delta x}$$

A fin de obtener mejores aproximaciones a la razón de cambio "instantánea" en el punto x_0, sólo es necesario tomar intervalos más pequeños, es decir, hacer que Δx tienda a cero. A medida que Δx tiende a cero, la expresión: $\frac{\int(x_0+\Delta x)-\int(x_0)}{\Delta x}$ se aproxima, tanto como se quiera a la razón de cambio instantánea en x_0. Así, en el *límite*, cuando Δx tiende a cero, el cociente $\frac{\int(x_0+\Delta x)-\int(x_0)}{\Delta x}$ tiende a un valor límite, indicado por dy/dx. Éste es el valor numérico que se llama *derivada de la función f(x) en el punto* x_0. Pero ya que x_0 es un punto arbitrario, *puede decirse que la derivada representa la razón de cambio instantánea de una función a medida que la variable independiente pasa por un conjunto completo de valores.*

En obsequio a la claridad, puede resultar útil una interpretación geométrica de la derivada. Cronológicamente, la interpretación geométrica precedió a la analítica. Uno de los problemas principales del siglo XVII consistía en trazar la tangente a una curva en un punto arbitrario. Fue resuelto por el predecesor y profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow. En base a las investigaciones geométricas de Barrow. Newton desarrolló el concepto de la razón de cambio sobre curvas definidas analíticamente. La íntima relación entre el álgebra y la geometría, resumida por el hecho de que cada ecuación tiene su gráfica y cada gráfica una ecuación, dio sus frutos una vez más. Sea la gráfica de la función $y = f(x)$, en el plano cartesiano, la curva indicada en la figura 131.

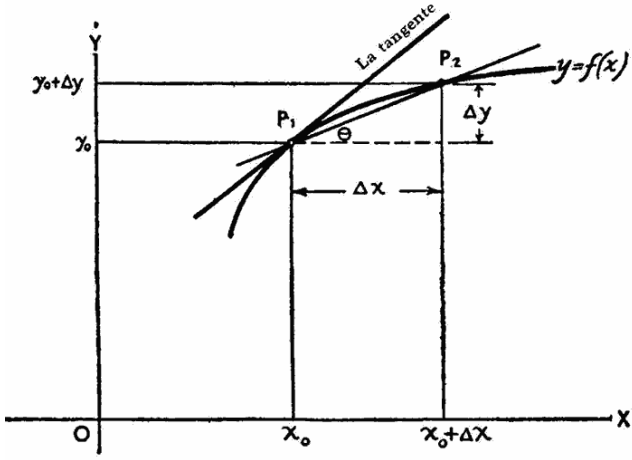


Fig. 131

Consideremos los puntos P_1 y P_2 de esta curva; sus abscisas están indicadas por x y $x_0 + \Delta x$. donde Δx es la distancia entre la proyección de los dos puntos sobre el eje de las x. Las ordenadas de los puntos P_1 y P_2 están entonces determinadas por la ecuación de la curva y son $f(x_0)$ y $f(x_0 + \Delta x)$, respectivamente.

La pendiente[2] de la recta que une P_1 y P_2 (la tangente del ángulo A), es precisamente el cociente:

$$\frac{\int(x_0 + \Delta x) - \int(x_0)}{\Delta x}$$

A medida que Δx *tiende* a cero, el punto P_2 se traslada a lo largo de la curva acercándose al punto P_1 y la pendiente de la recta (el cociente arriba indicado) tiende como valor límite, a la pendiente de la tangente a la curva en el punto Pi. Pero la pendiente de la tangente en ese punto es, numéricamente, igual a

$$dy/dx \text{ (ya que } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx})$$

En otras palabras, la pendiente de la tangente en cada punto, a lo largo de la curva, es idéntica a la derivada en ese punto. O, dicho de otra manera, la pendiente de la tangente a una curva indica la inclinación que toma la curva (es decir, si asciende o desciende) y, de este modo, su razón de cambio. En consecuencia, el equivalente geométrico de la derivada es la pendiente de la tangente.

Podemos ahora volver a recordar nuestra proposición de que los valores para los cuales una función alcanza su máximo o su mínimo, corresponden a los puntos de curva en los cuales la tangente es horizontal. La pendiente de una recta horizontal es, por supuesto, igual a cero. Ya que la derivada es idéntica a la pendiente de la tangente, llegamos a la conclusión de que los valores máximos y mínimos de una función, son aquellos para los cuales la derivada de la misma es igual a cero. De esta manera pueden resolverse muchos problemas interesantes.

El problema que tratamos anteriormente y que consistía en determinar el rectángulo de área máxima para un perímetro dado, cae dentro de esta categoría. Indicábamos con x un lado del rectángulo, el lado adyacente con $(2–x)$ y el área y, por $x\,(2–x)$. Siendo el área una función de x, su derivada será igual a cero cuando la función alcance su valor máximo. Hallar el rectángulo de área máxima por medio del cálculo implica los siguientes pasos: (1) derivar la función, es decir, hallar su derivada; (2) igualar a cero esta derivada; (3) despejar x en la ecuación resultante.

Primer paso

$$
\begin{aligned}
y &= x\,(2–x)\\
y+\Delta y &= (x+\Delta x)\,(2–x–\Delta x)\\
(y+\Delta y)-y &= (x+\Delta x)\,(2–x–\Delta x)-x\,(2–x)\\
\Delta y &= 2x–x^2–x\Delta x+2\Delta x–x\Delta x–\Delta x^2–2x+x^2\\
\Delta y &= 2\Delta x–2x\Delta x–\Delta x^2\\
\Delta y/\Delta x &= 2–2x–\Delta x
\end{aligned}
$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

y $dy/dx = 2–2x$

Segundo paso

$dy/dx = 2–2x = 0$

Tercer paso

$2–2x = 0$
$2 = 2x$
$1 = x$

Se puede comprobar que es el resultado obtenido anteriormente, sin recurrir al cálculo: el rectángulo de área máxima de perímetro 4 es un cuadrado de lado igual a la unidad. Ejemplos más complicados, tomados de la química, la física, etc., son menos sencillos en cuanto a técnica matemática, pero no con respecto a las ideas que encierran.

Al considerar la derivada en cada punto del intervalo sobre el cual está definida, hemos visto que la derivada es, a su vez, una función de la variable independiente. La derivación no necesita detenerse aquí, puesto que la función derivada puede también tener una derivada, la segunda derivada de la función original. La notación empleada para indicar la segunda derivada de $y = f(x)$, es $\frac{d^2y}{dx^2}$. La derivada *n*-ésima de una función se obtiene derivando la función *n veces*. Su símbolo es $\frac{d^ny}{dx^n}$. ¿Qué significan estas derivadas de orden superior?

Habitualmente, suele darse a la segunda derivada una interpretación física y una geométrica. Si la función: $y = f(x)$ representa la distancia recorrida por un cuerpo que cae, en el tiempo x. la primera derivada representa la razón de cambio de la distancia con respecto al tiempo. La segunda derivada es la razón de cambio de la *velocidad* con respecto al tiempo y se la conoce generalmente como la *aceleración* del cuerpo. Para un cuerpo que cae, la distancia (en metros) $y = 4{,}905x^2$,

debe derivarse una vez para obtener la velocidad y de nuevo, otra vez más, para obtener la aceleración. Los detalles matemáticos de ambas derivaciones son:

(I)

$$\begin{aligned}
y &= 4{,}905x^2 \\
y + \Delta y &= 4{,}905\,(x + \Delta y)^2 \\
(y + \Delta y) - y &= 4{,}905\,(x + \Delta x)^2 - 4{,}905x^2 \\
&= 4{,}905\,(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 4{,}905x^2 \\
&= 4{,}905x + 9{,}81x\Delta x + 4{,}905\Delta x - 4{,}905x \\
\Delta y &= 9{,}81x\Delta x + 4{,}905\Delta x^2 \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= 9{,}81x + 4{,}905\Delta x \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= 9{,}81x
\end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 9{,}81x \\
\frac{dy}{dx} + \Delta\frac{dy}{dx} &= 9{,}81\,(x + \Delta x) \\
\frac{dy}{dx} + \Delta(\frac{dy}{dx}) - (\frac{dy}{dx}) &= 9{,}81\,(x + \Delta x) - 9{,}81x \\
\Delta\frac{dy}{dx} &= 9{,}81\Delta x \\
\frac{\Delta\frac{dy}{dx}}{\Delta x} &= 9{,}81
\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(\frac{dy}{dx})}{\Delta x} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9{,}81$$

La segunda derivada es una constante, el número 9,81 (9,81 m/s^2), que se denomina la aceleración de la gravedad terrestre de un cuerpo que cae y es debida a la atracción terrestre. Expresa el hecho notable de que cualquier cuerpo, prescindiendo de su masa, al ser arrojado desde una altura de 4,905 metros sobre el suelo (y haciendo caso omiso de la resistencia del aire), llegará a él en un segundo, moviéndose a una velocidad de 9,81 m/s en el instante del choque.

Veamos ahora la interpretación geométrica de la segunda derivada. Para curvas dibujadas en el plano, en cada punto, la *curvatura* es directamente proporcional a la segunda derivada. Para determinar la curvatura de un arco dado, dibujamos el círculo que mejor se adapte a ese arco.

El radio de ese círculo es el *radio de curvatura* y su valor recíproco, la *curvatura.*

Veamos cómo se aplica, por ejemplo, a la línea recta. La curvatura de una línea recta es igual a cero. Cualquier función cuya gráfica sea una línea recta, tiene una ecuación de la forma: $y = mx+b$, donde m y b son constantes.

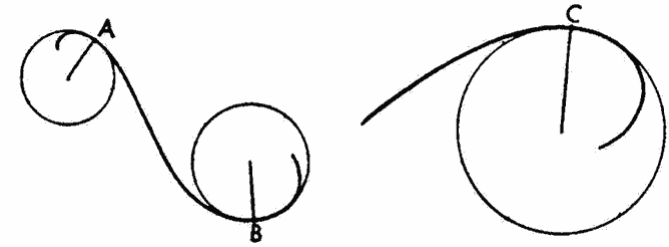


Fig. 132

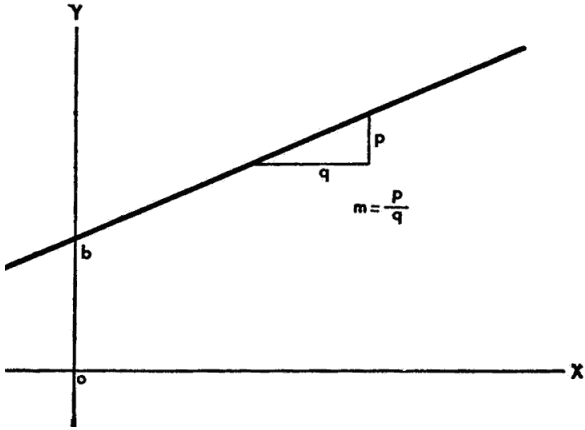


Fig. 133. Representación de la ecuación: $y = mx + b$.

La derivación da: $dy/dx = m$. Cuando se deriva m, su razón de cambio o derivada es igual a cero, ya que m es una constante. De este modo, la primera derivada nos indica que la pendiente de una línea recta es constante y la segunda derivada, que su curvatura es nula.

No existen interpretaciones físicas o geométricas, simples, de la tercera, cuarta y demás derivadas. Las derivadas de orden superior aparecen, sin embargo, en muchos problemas de física. A los ingenieros de automóviles les interesan mucho las derivadas terceras porque les informan acerca de la calidad de marcha de un coche. Los ingenieros civiles, que se ocupan de la elasticidad de las vigas, la resistencia de las columnas y todos los aspectos de la construcción donde aparecen esfuerzos de corte y compresión, necesitan las derivadas primera, segunda, tercera y cuarta; existen otros innumerables ejemplos en los campos de las ciencias físicas y las aplicaciones estadísticas a las ciencias sociales.

Los problemas resueltos por el cálculo integral tienen su origen en una época muy anterior a los del cálculo diferencial. Pero esto no quiere decir que los recursos matemáticos usados en uno de ellos precedieran a los del otro, pues los conceptos

de límite, función y límite de una función, *tal como aparecen en el cálculo*, fueron desarrollados al mismo tiempo para sus dos ramas. Pero el tipo de problema que el cálculo integral trata de resolver es más fácil de proponer y, por lo tanto, no es sorprendente encontrar en los escritos de los matemáticos griegos problemas que hoy identificamos como pertenecientes a la integración.

Mucho más sorprendente es la estrecha relación que existe entre las dos divisiones del cálculo, el cálculo diferencial y el cálculo integral. Una cosa es determinar la razón de cambio de una función o la pendiente de la tangente a una curva y otra, que parece ser de un orden totalmente distinto, calcular el área limitada por una curva. Por maravilloso que pueda parecer el eslabón entre estas dos investigaciones, aparentemente inconexas, es secundario con respecto a la satisfacción que experimenta el matemático ante el carácter complementario de tan poderosos recursos.

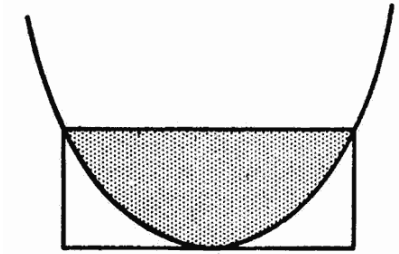


Fig. 134. Cuadratura de la parábola. La superficie sombreada es igual a 2/3 del área del rectángulo.

"La cuadratura del círculo" había desafiado a los matemáticos griegos. Otro aspecto de este problema, quizá no tan bien conocido, pero de igual importancia, es la rectificación del círculo. Consiste en la determinación de la longitud de la circunferencia de un círculo, en función de la longitud de su radio. A pesar de que nunca pudieron vencer al círculo, domaron, parcialmente, a la parábola. En esto, como en otras cosas, lo hicieron con su fecundo ingenio. Lograron, con métodos

profundamente hermosos, la cuadratura de la parábola[147] pero no pudieron rectificarla [148].

La exposición de sus métodos revelaría más del genio de Arquímedes que de la teoría general del cálculo integral. Indudablemente el plan de Arquímedes fue anticipo de la técnica del cálculo, pero en los siglos comparativamente estériles que siguieron, la semilla que plantó no alcanzó a germinar. Hasta la aparición de Kepler, no se registró tentativa alguna de tratar sistemáticamente la determinación de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas. Es triste consignar que su incentivo no fue la sed de aprender, sino las necesidades comerciales de la industria de apagar la sed. "Kepler fue llevado, en un principio, a hacer sus cálculos... con el deseo de mejorar los métodos imperfectos, que entonces se utilizaban, para calcular el contenido de los toneles de vino y de otras vasijas. Al comprar vino, observó que los vendedores de este producto determinaban el contenido de los barriles introduciendo una varilla de medir a través de la boca del tonel hasta las duelas opuestas, sin tener en cuenta la curvatura. Haciendo girar alrededor de su eje la sección longitudinal del barril, se obtendría un cuerpo de volumen igual al del tonel. El plan de Kepler fue dividir dichos sólidos de revolución en un infinito número de partes elementales y sumarlas y, en su *Stereometria,* aplica este método a unos noventa casos especiales. Kepler consideró a los arcos infinitamente pequeños como segmentos rectilíneos, a los rectángulos planos infinitamente estrechos, como líneas y a los cuerpos infinitamente delgados como planos. El concepto de las magnitudes infinitamente pequeñas que manejaba era aquel que los antiguos habían

[147] La cuadratura de la parábola, como ya lo hemos visto, consiste en calcular el área limitada por un segmento parabólico y una línea recta.

[148] La longitud de un segmento parabólico sólo puede expresarse en función de logaritmos y por consiguiente, no podía ser calculada mediante los métodos elementales conocidos por los antiguos.

eludido, por lo general, pero que poco después serviría de base al método de Cavalieri[149]."

Tal vez convendría destacar, a esta altura de nuestra exposición sobre el cálculo, que toda referencia al infinito, ya sea pequeño o grande, ha sido cuidadosamente eludida. Gracias a Weierstrass, supo dominar al "fantasma" infinitesimal, el cálculo se asienta firmemente sobre fundamentos comprensibles, y no metafísicos, como límite, función y límite de una función. Nada impide hacer extensivos estos conceptos al cálculo integral. En realidad, la eliminación de lo infinitamente pequeño es más importante aún para el cálculo integral que para el diferencial. Fue precisamente este refinamiento del pensamiento el que elevó al cálculo a la categoría de ciencia exacta.

La obra de Cavalieri marcó rumbos nuevos por su mayor generalidad, merced a un método más abstracto que el de Kepler. Uno de los teoremas principales todavía lleva su nombre. Si dos sólidos tienen la propiedad de que al ser cortados por planos sus áreas quedan en proporción constante, sus volúmenes estarán en la misma proporción.

La cuestión inicial, pues, para calcular las áreas delimitadas por curvas, estuvo en vías de solución tan pronto la rudimentaria maquinaria lo hizo posible. Sin embargo, la disposición de la maquinaria era inadecuada para el cálculo de la longitud de una línea curva. Se requería, en consecuencia, un artificio diferente.

Todos los problemas sencillos, en matemáticas, participan de un rasgo común: no se puede anticipar qué dificultades pueden ocultar Por cierto, que nada parece más fácil que medir la longitud de una línea. Tómese una hoja de papel y márquense en ellas dos puntos. Si se unen estos dos puntos con una línea recta, todo lo que se necesita para determinar su longitud, es una regla graduada. Ni siquiera necesitamos desviarnos por el mal camino al que nos conduciría el racio-

[149] Wolf, *History of Philosophy, Science and Technology in the Sixteenth and Seventeenth Centuries.*

cinio filosófico: Qué medios se emplearán para medir la longitud de la regla; qué medios se emplearán para medir la varilla de medida que medirá la regla, etc. Se admite que podemos medir la longitud de una línea recta. Supongamos, sin embargo, que unimos los dos puntos con una curva; hallar su longitud es un asunto completamente distinto. Una manera de hacerlo sería tomar un trozo de cordel, adaptarlo a lo largo de la curva, luego sacarlo y medir su longitud con una regla. Pero esto nos lleva al punto de partida, porque parece que las únicas líneas que podemos medir son las rectas. En efecto, para medir la longitud de una línea curva es totalmente necesario "rectificarla".

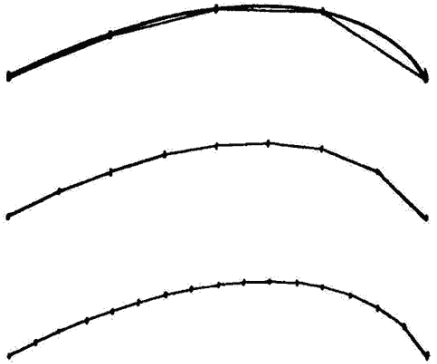


Fig. 135. Aproximándose a la longitud de una curva mediante segmentos rectilíneos.

Ahora bien, podrían sugerirse otros medios para medir las curvas. Se ha recurrido con frecuencia, principalmente en este capítulo, a métodos de aproximación. De este modo, podemos dividir al arco en un gran número de partes pequeñas y unir los puntos extremos de los pequeños arcos con líneas rectas. La suma de las pequeñas líneas rectas diferirá de la suma de los pequeños arcos en menos de lo que difiere una línea recta de la longitud de toda la curva.

En otras palabras, la suma de las longitudes de las pequeñas líneas rectas se aproximará a la longitud de la curva. Eli-

giendo un número suficientemente grande de tramos rectos (cada uno de ellos, muy pequeño) lograremos hacer que la suma de sus longitudes difiera de la longitud de la curva tan poco como se quiera. Cuanto más numerosas son las pequeñas rectas, tanto más exacta será la aproximación.

Si concebimos que el número de líneas rectas aumenta indefinidamente, puede decirse que su suma tiende a un límite, la longitud de la curva. Tratemos de formular esto en función de límites, y de límites de funciones.

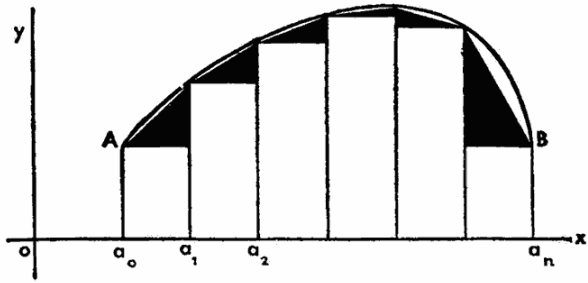


Fig. 136. Aproximándose a la longitud de una curva mediante las hipotenusas de triángulos rectángulos. La base de cada triángulo es Δx y su altura Δy.

Supongamos que $y = f(x)$ es la ecuación de la curva que une los dos puntos A y B en un plano cartesiano. Subdividamos a la porción de eje x. situada bajo la curva, en n partes iguales. La abscisa del punto inicial A es a_0; la abscisa del punto siguiente será a_1; del tercer punto, a_2 y así sucesivamente, de manera que la abscisa del último punto, o sea B, es a_n. La diferencia entre dos valores adyacentes de x la indicaremos con Δx, la diferencia entre dos valores adyacentes de y (obtenida levantando perpendiculares de los valores adyacentes sobre el eje de las abscisas) es Δy. En la figura 136, cada par de puntos elegidos sobre la curva, acota a una hipotenusa de un triángulo rectángulo sombreado, cuya base es Δx y cuya altura es Δy. Así, la hipotenusa de cada uno de estos triángulos será una aproximación a la longitud de esa porción de curva que la limita. Se deduce que la suma de las hipotenusas

de todos los pequeños triángulos, se aproxima a la longitud de la curva. Aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene fácilmente el valor de cada hipotenusa. Aumentando el número de subdivisiones, las aproximaciones serán más exactas. Así, a medida que Δx tiende a cero, es decir a medida que se hacen más pequeños los intervalos tomados a lo largo del eje x, la suma de las hipotenusas de los triángulos rectángulos tiende a un límite, que es la longitud de la curva. Debe notarse que la longitud de cada pequeña hipotenusa es una función de su correspondiente Δx.

Podemos volver ahora a la determinación del área limitada por una curva, pues es en este problema donde los conceptos del cálculo integral fueron expuestos por primera vez.

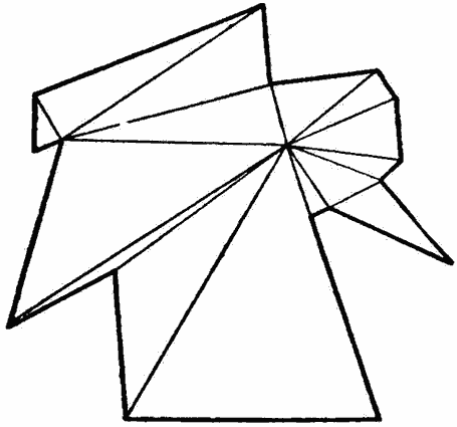


Fig. 137. Se determina la superficie de este polígono irregular, formando los triángulos indicados y calculando el área de cada uno de ellos.

Calcular el área de una figura limitada por líneas rectas, por irregular que sea, es comparativamente fácil. Sólo se necesita trazar líneas auxiliares que dividan a la figura original en cierto número de triángulos. Sumando las áreas de estos triángulos se obtiene la superficie de la figura dada.

Cuando la frontera de una figura no es recta sino curva, este procedimiento es inadecuado y debe recurrirse, nueva-

mente, a la imaginación. Si dividimos los lados curvos de la figura en un gran número de partes, uniendo sus puntos extremos con líneas rectas, exactamente como lo hicimos antes, la figura resultante, un polígono acotado por lados rectilíneos, tiene un área que puede determinarse por medios elementales. Aumentando el número de lados del polígono, puede hacerse diferir su área del área de la figura original, tan poco como se quiera, y obtener, así, una aproximación tan perfecta como se pida.

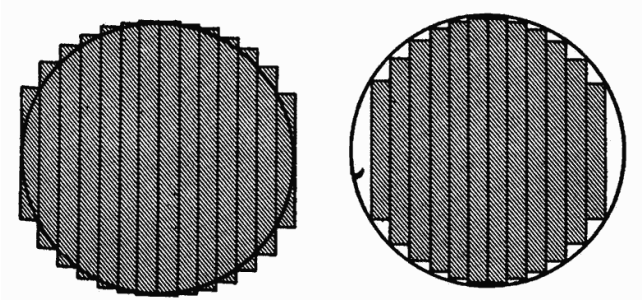


Fig. 138. Aproximación del área de un círculo mediante rectángulos.

Pero un medio más efectivo de dividir a una figura curvilínea, consiste en valerse de rectángulos. Precisamente, este artificio fue inventado por Arquímedes. En la figura 138 vemos, por ejemplo, un círculo dividido en fajas rectangulares. De acuerdo al método de construcción de estas fajas, se verá que puede obtenerse no sólo una sino dos aproximaciones. La primera da el área de los rectángulos inscritos en el círculo y la segunda, la de los circunscritos. La discrepancia entre ambas superficies de rectángulos disminuye a medida que aumenta el número de ellos, en otras palabras, a medida que disminuye la anchura de los mismos. Su límite común, a medida que la superficie interior aumenta y la exterior disminuye, es el área del círculo.

En lugar de limitamos a este ejemplo especial, si tratamos el problema general de determinar el área encerrada por un segmento de una curva arbitraria, el método que acabamos de

describir, puede, quizás, aclararse más. Deseamos hallar el área de la sección sombreada de la figura 139.

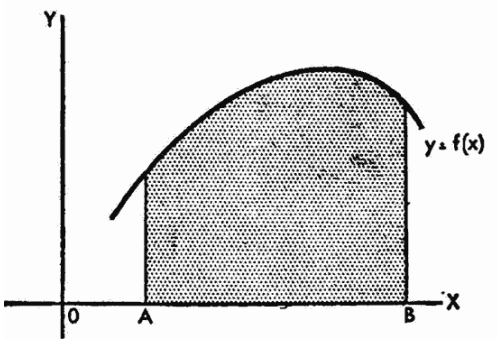


Fig. 139

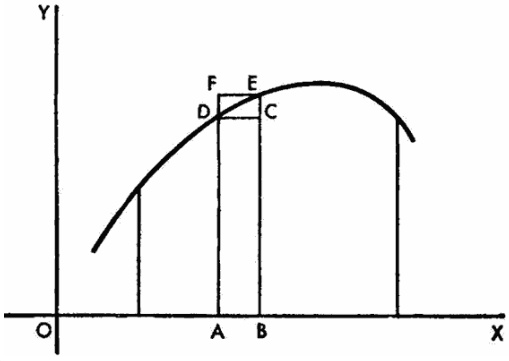


Fig. 140

La misma está limitada, en su parte superior, por la curva $y = f(x)$, en la parte inferior por el segmento del eje de las x que va de $x = A$ a $x = B$, ya la derecha y a la izquierda, por dos rectas paralelas al eje de las y. Dividamos al eje de las x en n partes iguales, como en la figura 136. Levantemos una perpendicular a dicho eje en cada uno de los puntos de la división, que llegue hasta la curva. En cada punto donde una perpendicular corte a la curva, tracemos una línea horizontal hasta las verticales contiguas. Para cada pequeña subdivisión del eje de las x habrá dos rectángulos, uno por debajo de la

curva y el otro sobresaliendo de la misma y conteniendo a parte del área exterior. Consideremos un rectángulo típico (véase la fig. 140).

El área del rectángulo más pequeño *ABCD* es igual al producto de la base *AB* por la altura *AD*, siendo la altura el valor de la función en el punto inicial del subintervalo *A*, el área del rectángulo más grande *ABEF* es el producto de la misma base por la altura *BE*, la cual es el valor de la función en el punto terminal del subintervalo *B*. El área encerrada por la curva queda comprendida entre las áreas de estos dos rectángulos. Se obtiene una excelente aproximación del área buscada, tomando el valor *promedio* del área de ambos rectángulos.

Repitiendo este proceso para cada subintervalo y tomando la suma de las áreas de los rectángulos promedio, se obtiene una aproximación de toda el área encerrada por la curva. Valiéndonos, una vez más, del concepto de límite, puede verse que a medida que aumenta el número de subintervalos tomados sobre el eje de las *x*, la suma de las áreas correspondientes, tiende, necesariamente, al área de la figura sombreada (fig. 139). En el límite, esta suma de los muy pequeños elementos de área se denomina, *lo integral definida de la función y = f(x) entre los valores* de $x = A$ y de $x = B$, y con la notación de Leibniz se indica:

$$\int_A^B f(x)dx$$

Resumiendo brevemente: cada uno de los subintervalos sobre el eje de las *x* es Δx, que es la base de cada una de las pequeñas áreas rectangulares. La altura del rectángulo promedio está representada por una recta perpendicular trazada desde un punto interior, característico, del intervalo Δx a la curva. Su valor es, por supuesto, $f(x)$. El área de cada uno de dichos rectángulos promedio es: $f(x)\ \Delta x$, y la suma de estas áreas es la suma de todos esos productos. Con el simbolismo técnico el área límite se escribe: $\int_A^B f(x)dx$, donde dx, reemplaza a Δx ya que $\Delta x \to 0$.

Nuestra interpretación de la integral definida es que representa a un área. Atribuirle ese significado es siempre posible, pero existen integrales de ciertas funciones que tienen, además, un significado físico distinto. Esto se debe principalmente a que la integral definida es un número, una *suma*, además de un área. Todas las veces que, en la ciencia, se sume una función hasta el límite, la integral definida desempeña un papel. Una de las conquistas del cálculo integral ha sido la determinación del *momento de inercia* de todos los sólidos. Una vez más, es a la integral definida a la que los ingenieros civiles deben estar agradecidos, puesto que el puente Golden Gate, por ejemplo, depende más de ésta que del hierro y del hormigón. Resistir los esfuerzos de nuestras gigantescas presas, con sus caras curvas e irregulares, supone otro problema de integración de funciones. Determinando la presión del agua en un punto arbitrario y sumándola en todo el paramento del dique, queda determinada la fuerza total. El baricentro, es decir el centro de gravedad de una figura plana o de un sólido, se determina fácilmente por medio del cálculo integral cuando se aplica a la función particular que define esa figura y podrían multiplicarse indefinidamente ejemplos semejantes.

Más allá del concepto de integral definida, con sus múltiples usos y su extraordinario campo de aplicación, está la noción de *integral indefinida*, cuyo valor intrínseco para el matemático es aún mayor. Su principal interés teórico consiste en que nos permite comprobar la asombrosa relación existente entre la derivada y la integral.

Consideremos la función $y = f(x)$. En lugar de limitar el intervalo, como lo hicimos antes, de $x = A$ a $x = B$. imaginemos que se extiende desde $x = A$, hasta $x = x_0$, donde x_0 puede asumir *cualquier* valor. Para diferentes valores de x_0, la integral definida tomará, también, diferentes valores. En realidad, no estamos considerando ya un área limitada, sino que disponemos de todo lo necesario para formar una tabla funcional. Por un lado tendremos registrados valores de x_0 y del otro, los valores correspondientes de la integral definida. Esta correspondencia entre los valores de x_0 y los de la integral definida,

constituye una función llamada "la integral indefinida" de la función $y = f(x)$. Aquí radica lo esencial del asunto: la integral definida de la función $y = f(x)$ es un número determinado por un intervalo de longitud definida y una porción de la curva $y = f(x)$, definida en ese intervalo. Cuando el intervalo se extiende desde un punto fijo a través de una sucesión de otros, a cada uno de éstos corresponde un valor de la integral definida. Esta correspondencia, esta función, es *la integral indefinida de la función original* $y = f(x)$ y se representa simbólicamente así:

$$\int f(x)dx$$

De todo esto podrá usted adivinar, quizá, lo que tienen de común las dos ramas del cálculo, aparentemente tan diversas, puesto que la relación entre derivación e integración nos trae reminiscencias de la aritmética elemental. Es la misma relación que existe entre la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, el elevar a una potencia y el extraer raíz. Una de las operaciones es la *inversa* de la otra. Partiendo de la función $y = f(x)$, por derivación obtenemos $\frac{dy}{dx}$. ¿Qué obtenemos al integrar $\frac{dy}{dx}$? Aquí se revela el motivo del cálculo puesto que obtenemos la función original $y = f(x)$. Una integral indefinida de la función $y = f(x)$ es otra función de x que indicaremos así: $y = F(x)$. Por supuesto que la derivada de $y = F(x)$ es $f(x)$. En consecuencia, toda función puede ser considerada como la derivada de su integral, y como una integral de su derivada.

Anteriormente aludimos a la función exponencial, $y = e^x$ y a su utilidad para describir los fenómenos de crecimiento. Es la única función cuya razón de cambio es igual a la función misma. Derivando $y = e^x$ se obtiene: $\frac{dy}{dx} = e^x$. Integrando sale el mismo resultado. Se deduce entonces que la biografía de la población de cualquier organismo —ameba, hombre o pino

californiano, de cualquier fenómeno que presente propiedades de crecimiento orgánico— puede describirse adecuadamente mediante la integral de e^x. Esta idea, un tanto inquietante, no es difícil de comprender. La proporcionalidad de la razón de cambio de crecimiento con respecto al estado de crecimiento puede sintetizarse mediante la función exponencial. Si ésta es integrada, el crecimiento total registrado en cualquier período determinado está dado por la integral definida y el carácter general del crecimiento está sucintamente explicado mediante la integral indefinida.

Para concluir, examinemos nuevamente el problema de un cuerpo que cae. Habíamos comenzado considerando la distancia desde la cual cayó el cuerpo en un período de tiempo y establecimos su velocidad, en cada instante, por derivación. La aceleración en cada instante fue obtenida, a su vez, por derivación de la primera derivada, hallando la rapidez de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Galileo y Newton hicieron lo mismo, pero a la inversa. Supusieron, sagazmente, que la aceleración de un cuerpo que cae era constante, la constante de gravitación. Integrando la función que expresa esta hipótesis, hicieron el descubrimiento clásico de las leyes del movimiento:

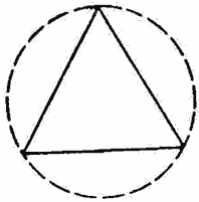
1. La rapidez de un cuerpo que cae es igual a gt, en la que g es la aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2) y t el tiempo transcurrido desde que se arrojó el cuerpo.
2. La distancia recorrida por el cuerpo que cae es: $1/2\ gt^2$.

Éstas y las demás leyes del movimiento que rigen a todas las partículas del Universo, se deducen, sencilla y elegantemente, por medio del cálculo. Pero esto no es todo, puesto que el cálculo no sólo ayudó a elevar algunos de los secretos más íntimos de la naturaleza, sino que le dio al matemático más nuevos mundos por conquistar que aquéllos por los que suspiró Alejandro el Grande.

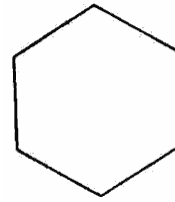
APÉNDICE

Curvas patológicas

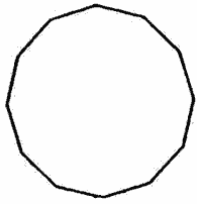
Las curvas que trata el cálculo son normales y saludables, no poseen idiosincrasias. Pero los matemáticos no se sentirían a gusto con sólo ocuparse de configuraciones simples y vigorosas. También su curiosidad se extiende a los pacientes psicopáticos, cada uno de los cuales presenta una historia clínica que no se parece a la de ningún otro; son éstas las curvas patológicas de las matemáticas. Trataremos de examinar algunas de ellas en nuestra clínica.



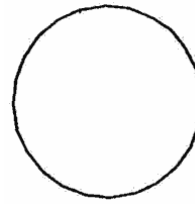
El triángulo equilátero es la curva C



El hexágono regular es la curva C_2



El dodecágono es la curva C_3



La figura de 24 lados constituye la curva C_4

Figs. 141, 142, 143, 144. El círculo considerado como curva límite de una sucesión de curvas.

Antes de hacerlo, será necesario introducir el concepto de curva como el límite de una sucesión de polígonos. Supóngase que se inscribe un triángulo equilátero en un círculo. Este triángulo puede ser considerado como una curva —C_1—. Sea C_2 el hexágono regular que se obtiene dividiendo en dos par-

tes iguales a los tres arcos de la figura 141 y uniendo, en orden, los seis vértices (fig. 142).

C_3 es el dodecágono regular formado al dividir en dos partes iguales a los seis arcos de la figura 143 y uniendo, en ese orden, los doce vértices. Repítase este proceso dividiendo a los arcos y duplicando el número de lados. La curva a la que se acercan, como límite, estos polígonos es el círculo.

Así, la circunferencia, puede ser definida como la curva límite de una sucesión de curvas o polígonos.

1. La *curva Copo de Nieve*. Se comienza con un triángulo equilátero de lado igual a la unidad. Este triángulo es la curva C_1 (fig. 145).

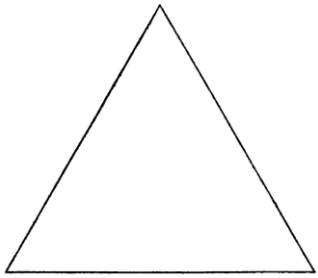


Fig 145. La primera etapa de la curva copo de nieve, C_1.

Divídase a cada uno de sus lados en tres partes iguales y tómese el subintervalo de en medio, determinado por la subdivisión y constrúyase un triángulo equilátero dirigido hacia fuera. Bórrense las partes comunes a los triángulos nuevos y viejos. Esta curva poligonal simple se llama C_2. Divídase en tres partes iguales a cada lado de C_2 y nuevamente, en forma parecida, constrúyase un triángulo equilátero dirigido hacia fuera. Bórrese la parte de las curvas comunes a las figuras nuevas y viejas. Esta curva simple es C_3.

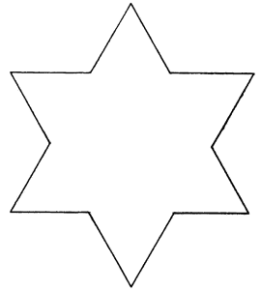


Fig. 146. La segunda etapa de la curva copo de nieve. C_2.

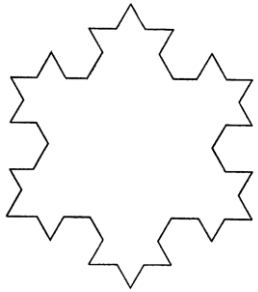


Fig. 147. La tercera etapa, C_3.

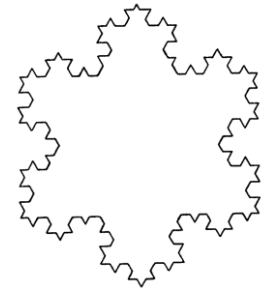


Fig. 148. La cuarta etapa C_4.

Repítase este procedimiento tal como lo indican las figuras 148-150.

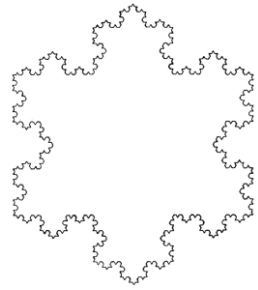


Fig. 149. La quinta etapa, C_5.

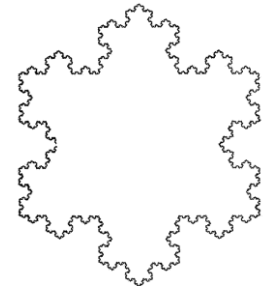


Fig. 150. La sexta etapa, C_6

¿Cuál es la *curva límite* de esta sucesión de curvas? ¿Por qué se le llama Curva Copo de Nieve? Y, ¿por qué se la describe como patológica?

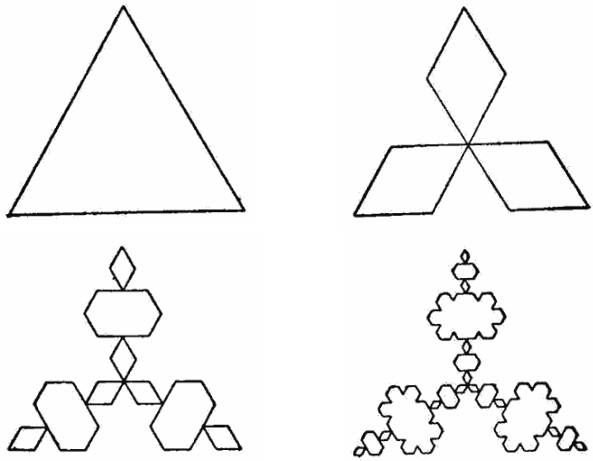
Su nombre se deriva de la forma que asume en las sucesivas etapas de su desarrollo. Su carácter patológico lo confirma este increíble rasgo: Aunque se concibe fácilmente que la curva límite cabe en una hoja de papel, es difícil imaginar que esto sea posible, porque, si bien el área es finita, ¡la longitud de su perímetro es infinita! Pero es evidente que en cada etapa de la construcción el perímetro aumenta, y ya que la sucesión de números que representan a la longitud del perímetro en cada etapa no converge, el perímetro supera toda cota prefijada. Estamos, pues, ante un hecho sorprendente: una curva de longitud infinita puede dibujarse en una pequeña hoja de papel —por ejemplo, en un sello de correos.

La demostración es sencilla. El perímetro del triángulo original era 3. El perímetro de la curva C_2 es 3+1; el de la C_3, $3+1+\frac{4}{3}$; el de la C_4, $3+1+\frac{4}{3}+\frac{4^2}{3^2}$. El perímetro de C_n es; $3+1+\frac{4}{3}+\frac{4^2}{3^2}+\cdots+\frac{4^{n-2}}{3^{n-2}}$. De este modo, a medida que crece *n*, crece la serie, porque estamos ante una serie infinita que no converge.

El hecho de que la curva no se sale del papel, prueba que el área del copo de nieve es finita. Explícitamente, el área de la curva final es 1⅗ veces mayor que la del triángulo original y por si esto no fuese bastante misterioso, considérese que no es posible indicar en ningún punto de la curva límite la dirección en la que ésta varía, es decir, no existe tangente [150].

2. *La curva anticopo de nieve.* Se obtiene dibujando los triángulos hacia dentro, no hacia fuera, y participa de muchas de las propiedades de la que acabamos de considerar. Su perímetro es infinito, mientras que su área es finita y tampoco se le puede trazar tangente alguna en ningún punto (figs. 151 a 154).

[150] De este modo tenemos, en esencia, una función continua sin derivada.



Figs. 151, 152, 153, 154. Las primeras cuatro etapas de la anticopo de nieve.

3. Otra curva patológica es la *Curva que entra* y *sale*. Trácese un círculo de radio igual a la unidad y divídase su circunferencia en seis arcos iguales. Tómense tres arcos alternados y diríjalos hacia dentro. El círculo original es C_1, la nueva figura, C_2 (figs. 155-156).

El perímetro de C_2 es igual al de C_1 por cuanto su longitud no se altera al doblar hacia dentro a los tres arcos.

Divídase luego cada arco en tres partes iguales y dóblese la parte media hacia el exterior, si ya está doblado hacia el interior y recíprocamente si lo está hacia el exterior Esta nueva curva es C_3. Su perímetro es también igual al del círculo original. Además, el área de C_3 es la misma que la de C_2 porque hemos añadido y sustraído, alternativamente, segmentos de igual tamaño (fig. 157).

Repitamos este proceso. La curva límite tiene un perímetro igual al perímetro del círculo. Su área es igual a la de C_2, que, a su vez, es igual al área de un hexágono regular. Esta curva, al igual que la de copo de nieve y la anticopo de nieve, tiene también sus características patológicas.

Mientras que la curvatura de un círculo se calcula sin dificultad, *la curva que entra* y *sale* presenta un aspecto distinto. Consideremos un punto cualquiera de ella. ¿En qué sentido, hacia el centro del círculo o hacia fuera del centro, mediremos su curvatura? Descubrimos que no hay curvatura definida. La segunda derivada, por lo tanto, no existe.

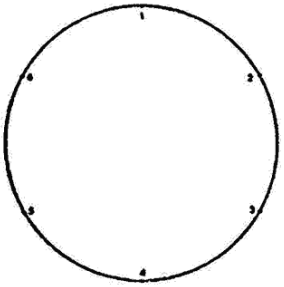


Fig. 155. La curva que entra y sale, etapa C_1.

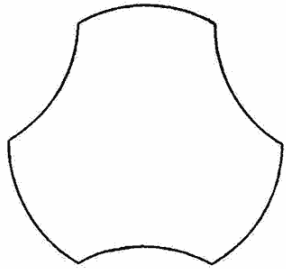


Fig. 156. Etapa C_2.

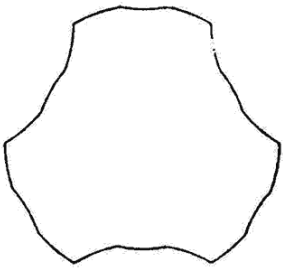


Fig. 157. Etapa C_3.

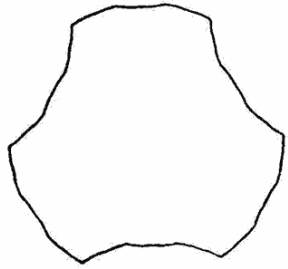


Fig. 158- Etapa C_4.

4. *Curvas que llenan el espacio.* Uno de los principios fundamentales de la geometría es que un punto no tiene dimensiones y que una curva es de una dimensión y no puede, por lo tanto, llenar un espacio dado. Esta férrea convicción debe, también, ser quebrantada. Pues contemplad el supremo ejemplar patológico, *la curva que llena el espacio*, la que no sólo ocupará el interior de un cuadrado, sino que se tragará el espacio de una caja cúbica.

Las etapas sucesivas de dicha curva se indican en las figuras 159 a 164. Elíjase *cualquier* punto en el cuadrado o cubo. Puede demostrarse que finalmente, cuando se haya completado la curva, llegará a pasar por ese punto. Ya que este razonamiento puede hacerse extensivo a *todos los puntos, se* deduce, lógicamente, que la curva debe llenar todo el cuadrado o el cubo.

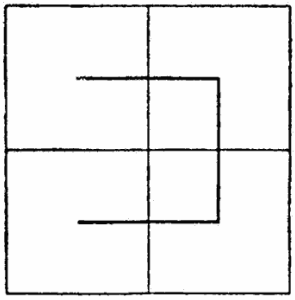


Fig. 159. La curva que llena el espacio. Etapa 1.

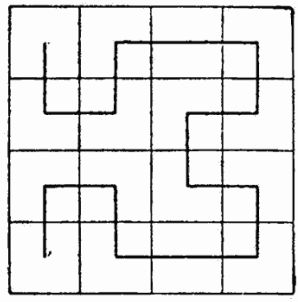


Fig. 160. Etapa 2.

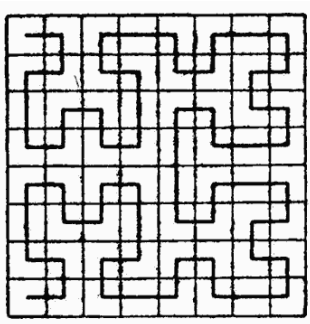


Fig. 161. Etapa 3.

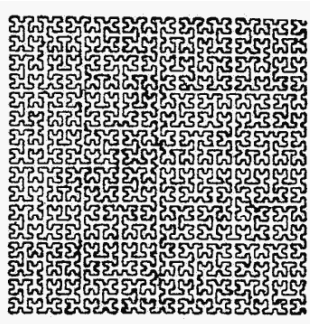
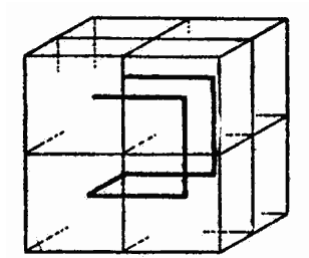


Fig. 162. Una etapa adelantada.



Figs. 163, 164. Las primeras dos etapas de una curva que llena en su totalidad una caja cúbica.

5. *La curva cruzada o entrelazada.* Esta curva tiene la propiedad de que se cruza a sí misma *en todos* y *cada uno de sus puntos.* Estamos seguros que usted no nos cree —ni nunca lo creería— pero puede ver las instrucciones para hacerla a continuación:

1er paso: Inscríbase un triángulo dentro de un triángulo, como en la figura 165, sombreando el triángulo interior.

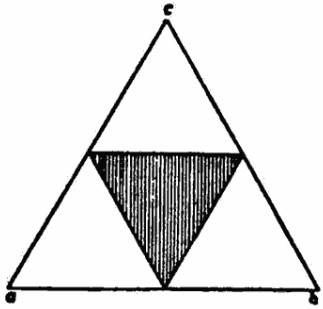


Fig. 165

2.° paso: Continúese el proceso para cada uno de los tres triángulos restantes, como en la figura 166.

3.er paso hasta el paso *n*: Repítase este proceso indefinidamente (la fig. 167 es la 5.ª etapa). Únanse entonces los puntos del triángulo original que quedaron sin sombrear y defórmesele de manera que los tres puntos *A. B* y *C* se junten. Tendremos entonces la curva cruzada o entrelazada.

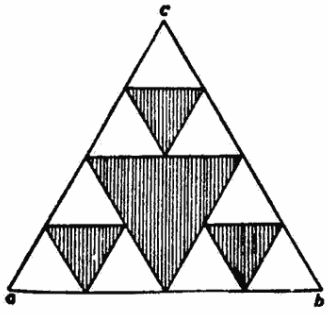


Fig. 166

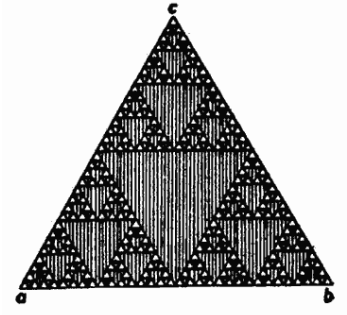


Fig. 167

EPILOGO. LA MATEMÁTICA Y LA IMAGINACIÓN

No hay *conclusión. ¿Qué cosa ha concluido, con respecto a la cual podamos llegar a una conclusión? No* hay *fortunas que puedan predecirse, ni consejos que puedan darse. Adiós.*

WILLIAM JAMES

"Minino de Cheshire", comenzó ella algo tímidamente... "Me dirás por favor, ¿qué camino debo tomar para irme de aquí?

"Eso depende mucho de dónde quieras ir", dijo el gato."

"Poco me preocupa dónde ir", contestó Alicia. "Entonces, nada importa qué camino tomes", replicó el gato.

LEWIS CARROLL

¿Qué es la matemática? Contestar a esta pregunta supone aludir a una enorme y variada extensión del pensamiento, que ha venido desarrollándose desde las épocas más remotas. Pero después de examinar todas las opiniones que se escalonan desde las de Pitágoras hasta las teorías de las más recientes escuelas de filosofía matemática, se pone de manifiesto la triste realidad de que es más fácil ser inteligente que claro. En los últimos tiempos, sobre todo, ha habido una tendencia a presentar epigramas en lugar de respuestas claras, aforismos que, desgraciadamente, arrojan poca luz. En el método de encarar el problema reside el principal obstáculo a una respuesta satisfactoria. Si uno fuese a preguntar: "¿Qué es la biología?" sería comparativamente sencillo, partiendo de una definición etimológica y luego agrupando el gran cuerpo de conocimientos comprendidos en las ciencias biológicas, llegar a una conclusión de cómo se sintetizan todos los ítems en una ciencia completa. Aun una explicación imperfecta tal como:

"La biología es la ciencia que estudia los caballos, murciélagos, narcisos y ballenas", daría una idea razonable de lo que se trata. Por otra parte, el estudio de las matemáticas —aritmética, álgebra, geometría, cálculo— no aclara más sobre su naturaleza que decir que se interesa por los números y que constituye una técnica útil. En lo tocante al concepto de número, no se ha dado aún una definición que, en sí misma, simplifique la tarea de definir las matemáticas.

Aquí, pues, en matemáticas, tenemos un idioma universal, válido, útil e inteligible en todas partes, en el espacio y en el tiempo —en los bancos y compañías de seguros, en los pergaminos de los arquitectos que levantaron el templo de Salomón y en las copias heliográficas de los ingenieros que, con sus cálculos, dominan los vientos. Aquí hay una disciplina para centenares de ramas, fabulosamente rica, literalmente sin límites en su esfera de aplicación, cargada de honores por una ininterrumpida "relación" de magníficas realizaciones. Aquí hay una creación de la mente, a la vez mística y filosófica en recursos. Rígida e imperiosa como la lógica, es todavía suficientemente sensitiva y flexible para satisfacer cualquier nueva necesidad. Sin embargo, este enorme edificio descansa sobre los fundamentos más simples y más primitivos, está forjado por la imaginación y la lógica de un puñado de reglas infantiles. Aun cuando hasta ahora ninguna definición ha abarcado sus fines o su naturaleza, ¿puede ser que la incógnita: "Qué es la matemática" quede sin respuesta?

No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio inigualado por ningún otro vuelo del pensamiento. Han hecho posibles tantos adelantos en las ciencias, son a la vez tan indispensables en los asuntos prácticos, y son tan fácilmente obra maestra de abstracción pura, que el reconocimiento de su preeminencia entre todas las conquistas intelectuales del hombre no es otro que el debido.

A pesar de esta preeminencia, la primera estimación significativa de las matemáticas tuvo lugar recientemente con motivo del advenimiento de las geometrías no euclidianas y de más de tres dimensiones. Esto no quiere decir que deban

menospreciarse los progresos logrados por el cálculo, la teoría de la probabilidad, la aritmética del infinito, la topología y otros temas que hemos tratado. Cada uno de ellos ha ampliado el dominio de las matemáticas y ha profundizado su significación así como nuestra comprensión del universo físico. Sin embargo, ninguna de ellas ha contribuido a la introspección matemática, al conocimiento de la relación entre sí y con respecto al todo de las partes que constituyen las matemáticas, tanto como las herejías no euclidianas.

Como resultado del espíritu valerosamente crítico que originó estas herejías, hemos superado la noción de que las verdades matemáticas tienen existencia independiente y aparte de nuestras propias mentes. Todavía nos resulta extraño que semejante noción pudiera haber existido alguna vez. Sin embargo, esto es lo que Pitágoras debió haber pensado —y Descartes, como asimismo centenares de otros grandes matemáticos anteriores al siglo XIX. Hoy las matemáticas son ilimitadas: han roto sus cadenas. Cualquiera que sea su esencia, reconocemos que son tan libres como la mente y tan prensiles como la imaginación. La geometría no euclidiana es una demostración de que las matemáticas, a diferencia de la música de las esferas, es el artificio propio del hombre sometido sólo a las limitaciones de las leyes del pensamiento.

La filosofía que lleva el nombre de positivismo lógico ha preparado un formidable programa: primero, eliminar la metafísica de la filosofía; y segundo, presentar las relaciones mutuas entre las leyes del pensamiento (es decir, la lógica) y las matemáticas. Algunos creen que en la evaluación de la naturaleza de las matemáticas el positivismo lógico representa un progreso mayor que el realizado por la geometría no euclidiana. Aunque muy modestamente, se ha expresado la esperanza de que aquí hay, al menos, una doctrina que encara con toda equidad las dificultades esenciales e inherentes que obstruyen el camino hacia la cumbre.

Purificando a la filosofía matemática de la metafísica, ha habido (a nuestro juicio), una ganancia real. Ya no se considerará más a las matemáticas como una clave de la verdad con

V mayúscula. Ahora puede ser considerada como una guía desastrosamente incompleta, aunque enormemente útil, de un país que en su mayor parte permanece inexplorado. Se han fijado algunas señales. La vasta red de caminos es parcialmente comprensible; hay señales para el perplejo viajero.

Por otra parte, uno no puede reprimir la sensación de que esta nueva apreciación de las matemáticas es tan incompleta, tan desprovista de colorido, que resulta casi trivial e inconsecuente. Al considerarlas simplemente como un puñado de proposiciones primitivas e indefinidas, unidas con una metodología para crear otras nuevas, parece que se ha perdido algo del espíritu, del gusto y del color de las matemáticas. Mientras tanto, quienes se oponen al positivismo lógico, admiten que sirve alguna finalidad, pero atacan el aturdimiento del raciocinio y la limitación de horizontes que inevitablemente impone. Nosotros compartimos la opinión de que las matemáticas, más que una fábrica de tautologías, constituyen un vehículo para llevar a cabo las más elevadas aspiraciones del intelecto creador.

En pocas palabras, he aquí lo que dice el positivista: La lógica se ocupa de las reglas formales para manejar los símbolos del idioma. Las matemáticas sólo se ocupan de las ecuaciones; es decir, literalmente, de proposiciones de equivalencia de números.

Todas las relaciones de significado, esenciales e internas, son de incumbencia de la ciencia matemática. Un ser omnisciente no necesitaría, pues, ni lógica ni matemáticas, ya que las relaciones entre todas las entidades serían, para él, evidentes en sí mismas. Aun cuando pudiera encontrar todavía útiles a otras ciencias, como, por ejemplo, la biología para proveerle de un catálogo de seres vivientes, o una guía telefónica para ayudarle a encontrar a sus amigos, habría desaparecido su necesidad de la lógica y de las matemáticas. Porque una vez que todo el significado y todas las relaciones fuesen plenamente descubiertas, estas disciplinas resultarían superfluas.

¿No existe, acaso, razón para pensar que en semejante interpretación, aun cuando nos hemos flagelado despiadada-

mente y ahuyentado el confuso espíritu de la metafísica, podemos también haber empobrecido la vitalidad de las matemáticas? ¿No podemos haber perdido también "el espíritu en la palabra"?

Como ya lo hemos señalado, la creación de la geometría no euclidiana singularizó la verificación de que las matemáticas en ningún sentido dependen de nuestro medio ambiente. Aunque existen muchas semejanzas entre el comportamiento de los fecundos y pequeños símbolos que escribimos sobre el papel o que juegan en nuestras cabezas y aquellos fenómenos que tienen lugar en el mundo físico, las matemáticas deben ser reconocidas como una disciplina autónoma, restringida sólo por las reglas formales del pensamiento. El desarrollo de las matemáticas es una imagen de la lucha eterna por mayor entendimiento y mayor libertad: de lo particular a lo general; desde las figuras limitadas por líneas rectas hasta las curvas patológicas; de las propiedades de ésta o aquella figura determinada a las propiedades de *todas* las figuras; de una dimensión a *n* dimensiones; desde lo finito hasta lo infinito. En esta marcha la imaginación ha desempeñado un notable papel. Porque la imaginación tiene el valor pragmático de adelantarse a la lenta caravana del pensamiento bien ordenado y frecuentemente reconoce la realidad antes que su pesado amo. En eso consiste su contribución esencial a una de las más extrañas colaboraciones del pensamiento: las sosegadas matemáticas y el vuelo de la imaginación.

Las matemáticas constituyen una actividad regida por las mismas reglas impuestas a las sinfonías de Beethoven, las pinturas de Da Vinci y las poesías de Homero. Así como las escalas, las leyes de la perspectiva y las reglas del metro parecen carecer de vitalidad y ardor, podrá parecer que las reglas formales de las matemáticas son tediosas. Sin embargo, finalmente, las matemáticas alcanzan pináculos tan elevados como los logrados por la imaginación de sus más osados exploradores. Y aquí se encierra, quizá, la última paradoja de la ciencia, puesto que en su prosaico tráfago, tanto la lógica

como las matemáticas dejan atrás, frecuentemente, a su avanzada y muestran que el mundo de la razón pura es más extraño aún que el mundo de la fantasía pura.

BIBLIOGRAFÍA

Esta bibliografía descriptiva contiene cierto número de obras que se relacionan con el contenido de este libro. No es (ni pretende ser) completa, terminante o suficiente. Es simplemente una expresión de gustos personales que puede ser útil al lector cuya curiosidad haya sido estimulada.

ABBOT, EDWIN A. *Flatland—A Romance of Many Dimensions*, Boston: Little Brown, 1929.

El célebre librito sobre el mundo de dos dimensiones.

AHRENS, W. *Mathematische Unterhaltungen und Spiele.* Leipzig: B. G. Teubner, Vol. I, 1910; Vol. II, 1918.

Para quienes entienden el idioma alemán, esta obra resultará muy agradable. Aunque algunos de sus capítulos son muy técnicos, representa un estudio completo y definitivo de los rompecabezas, con una profusión de cuentos, anécdotas y bosquejos históricos.

BALL, W. W. ROUSE. *Mathematical Recreations and Essays.* 11.ª Edición. Nueva York: Macmillan, 1939.

Constituye ésta una obra clásica, de mucha información, pero dispuesta más como un manual que para lectura continua. Es indispensable para quienes sean aficionados a los rompecabezas. BELL, E. T. *Men of Mathematics.* Nueva York: Simón and Schuster, 1937.

Los varios capítulos de este libro dedicados a las geometrías no-euclidianas hacen que su lectura sea estimulante y atrayente. En éste, como en otros temas de matemáticas, Bell es claro, su estilo chispeante y entretenido. Hay bosquejos biográficos de los matemáticos sobresalientes, desde Zenón hasta Poincaré, algunas veces notable, a menudo interesante, siempre leíble. La exposición de las partes difíciles de las matemáticas es particularmente buena.

—. *The Queen of the Sciences.* Nueva York: G. E. Stechert, 1938.

Es una reimpresión del encantador librito, publicado originalmente para la Exposición Mundial celebrada en Chicago en 1933. Sencillo y vale la pena leerlo.

BLACK, MAX. *The Nature of Mathematics.* Nueva York: Harcourt Brace, 1935.

Una relación de las filosofías matemáticas de las tres principales escuelas contemporáneas, conciso y claro, pero su lectura no es, en modo alguno, fácil.

BLISS, G. A. «Mathematical Interpretations of Geometrical and Physical Phenomena», *American Mathematical Monthly*, Vol. 40 (Octubre 1933).

Un relato, de lectura recomendable, sobre la aplicación de las matemáticas a los fenómenos físicos.

BRIDGMAN, PERCY W. *The Logic of Modern Physics.* Nueva York: Macmillan, 1927.

No es un libro de matemáticas, pero constituye una exposición clarísima de las modernas teorías físicas, las leyes de causa y efecto y de la probabilidad, escrito por un distinguido físico.

BALL, W. W. ROUSE. *History of Mathematics.* Nueva York: Macmillan, 1925.

CAJORI, FLORIAN. *History of Mathematics.* Nueva York: Macmillan, 1919.

Ambas obras son dos historias clásicas de las matemáticas. La obra de Cajori es sumamente detallada, si bien no resulta comparable a la monumental historia de las matemáticas escrita por el autor alemán Moritz Cantor, en cuatro grandes volúmenes. La obra de Ball aunque en algunos aspectos está fuera de época, tiene suficiente autoridad y, siendo menos detallada, puede leerse con más gusto y con menos base matemática.

CAJORI, FLORIAN. «History of Zeno's Arguments on Motion», *American Mathematical Monthly*, Vol. XXII (1913). Pp. 1-6, 292-297.

—. *A History of Elementary Mathematics.* Nueva York: Macmillan, 1917.

Una obra clásica, interesante, informativa, sin ser demasiado técnica.

CANTOR, GEORG. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Editada por P. B. Jordain. Chicago: Open Court, 1915.

Una traducción de la obra de Cantor sobre el infinito, particularmente valiosa por la introducción histórica.

CARSLAW, HORATIO S. The Elements of Non-Euclidean Plane Geometry and Trigonometry, Londres: Longmans Green & Co., 1916.

Un buen texto elemental de geometría no-euclidiana. Técnico.

COHEN Y NAGEL. Introducción a la lógica y al método científico.

Un libro admirable en todos sus aspectos. Un libro de texto en sí mismo. Capítulos claros y que ayudan a recordar sobre el problema del método científico y un capítulo especial sobre probable inferencia, bien razonado y bien escrito.

COOLEY, GANS, KLINE Y WAHLERT. *Introduction to Mathematics.* Nueva York: Houghton Mifflin Co., 1937.

Una introducción clara y sin pretensiones a muchas ramas superiores de las matemáticas, incluyendo las clases infinitas. Se adapta asimismo a varios otros tópicos tratados en este libro.

COURANT, RICHARD. *Differential and Integral Calculus.* Vol. I; Londres: Blackie & Son, 1934.

Un excelente texto con ejemplos singularmente buenos de las aplicaciones del cálculo infinitesimal.

DANTZIG, TOBÍAS. *Number, the Language of Science.* Nueva York: Macmillan, 1933.

Un relato interesante y no técnico del desarrollo del concepto de número, incluyendo los trasfinitos.

DE MORGAN, AUGUSTUS. *Budget of Paradoxes.* Chicago: Open Court, 1940.

Una colección de cartas, cuentos, anécdotas, paradojas y rompecabezas referentes a matemáticas.

DRESDEN, ARNOLD. *An Invitation to Mathematics.* Nueva York: Henry Holt & Co., 1936.

Un texto extraordinariamente valioso sobre matemáticas superiores, que incluye geometría analítica, teoría de los números, cálculo infinitesimal, geometría proyectiva y las matemáticas del infinito. Una obra llevada a cabo con la idea de hacer atrayentes a las matemáticas, presuponiendo el conocimiento de sólo álgebra y geometría elementales.

EDDINGTON, SIR ARTHUR S. Espacio, Tiempo y Gravitación.

Discusión brillante de los problemas de la relatividad incluyendo capítulos sobre «clases de espacio» y «¿Qué es geometría?». No es técnico, pero tampoco sencillo.

—. *Nuevos caminos de la ciencia.* Barcelona, 1956.

Contiene interesantes discusiones sobre la probabilidad, escritas por un famoso astrónomo e igualmente famoso escritor sobre ciencia popular. Además, el resto merece ser leído, como todas las obras de Eddington.

ENRIQUES, FEDERICO. *Historie Development of Logic.* Nueva York: Henry Holt, 1929.

La mejor obra de su género. Los «principios y estructura de la ciencia en la concepción de los pensadores matemáticos». Aunque en gran parte no es técnica, presenta, eventualmente, dificultades.

GALILEO. Diálogos acerca de dos nuevas ciencias.

No sólo es una de las más grandes obras de todos los tiempos, sino que es perfectamente fascinadora. Contiene, entre otras cosas, los puntos de vista de Galileo con respecto al infinito. Cualquiera que se interese en la historia de la ciencia o de las matemáticas, o, para el caso, aquellos a quienes deleite la lectura, no deben dejar de leer este libro. Además, esta edición es un hermoso trabajo de impresión de libros.

GRANVILLE, WILLIAM A., SMITH, P. F. Y LONGLEY, W. R. *Cálculo diferencial e integral.* Barcelona, 1978.

Un buen libro de texto elemental. Bien impreso, claro.

HARDY, G. H. *A Course of Pure Mathematics.* 6.ª Edición. Cambridge. Cambridge University Press, 1933.

Una obra clásica, esta introducción elemental a las matemáticas superiores es algo difícil, pero recompensará todos los esfuerzos que se le dediquen.

HOGBEN, LANCELOT T. *Mathematics for the Million.* Nueva York: W. W. Norton, 1937.

Con respecto a las matemáticas representa el mismo éxito que *Lo que el viento se llevó* con respecto a la novela. Bien escrito, interesante, este libro no es, en modo alguno, fácil. La interpretación marxista de la historia de la ciencia y de las matemáticas, en el estilo mordaz de Hogben, llena todo el libro.

JEANS, SIR JAMES H. *The Mysterious Universe.* Nueva York: Macmillan, 1930.

Brillante exposición de la ciencia moderna. Sir James tiene el inimitable don de hacer fáciles las cosas difíciles, de hacer que números gigantescos se recuerden más fácilmente que números de teléfonos, de hacer que teorías científicas sutiles resulten más transparentes que un gas invisible.

KEYNES, JOHN MAYNARD. *A Treatise on Probability,* Londres: Macmillan, 1921.

Sería difícil encontrar una obra más comprensiva e inteligible sobre la filosofía y las matemáticas de la probabilidad,

aunque muchos de sus capítulos son sólo accesibles para el matemático entrenado. Sin embargo, otras partes ?se entienden fácilmente y su estilo, como el de Bertrand Russell, es resplandeciente.

KEYSER, CASSIUS J. *Mathematical Philosophy,* Nueva York: Dutton, 1922.

Bien escrito, no es demasiado técnico y claro. Además, el profesor Keyser ha escrito muchos otros brillantes ensayos sobre matemáticas y la humanización de las matemáticas. Merecería el título de Gran Anciano de las Matemáticas, si no fuese porque a nadie se le ocurriría que Keyser, a los setenta y ocho años de edad, no es sino un espíritu joven.

KLEIN, FÉLIX. Elementary Mathematics from a Higher Standpoint. Nueva York: Macmillan, 1932.

Un matemático clásico, aunque no resulta fácil que lo siga un no matemático. Contiene abundante material, inclusive una discusión de las matemáticas trasfinitas.

LEVY, HYMAN. *Modern Science.* Knopf, 1939.

Este volumen dedica considerables partes a las aplicaciones de las matemáticas a la ciencia. El profesor Levy posee singulares dotes de simplificación. Altamente recomendable.

LIEBER, LILLIAN R. Y HUGH G. *Non-Euclidean Geometry,* Nueva York: Academy Press, 1931.

Un delicioso librito con hermosas ilustraciones que contribuyen a que los elementos de la geometría no-euclidiana resulten fácilmente comprensibles.

MANNING, H. P. *Non-Euclidean Geometry,* Boston, Ginn & Co., 1901.

Un texto breve, relativamente sencillo.

—. The Fourth Dimensión Simply Explained. Nueva York: Munn & Co., 1910.

Una colección de ensayos sobre la cuarta dimensión, presentados en un concurso establecido por la revista *The Scien-*

tific American. Muchos de los ensayos son entretenidos, habiéndose puesto en juego mucho ingenio para encontrar analogías de figuras cuadridimensionales en un mundo de tres dimensiones.

MARK, THIRRING, NÓBELING, HAHN Y MENGER. *Krise und Neuaufbau in den Exakten Wissenschaften*. Viena: Franz Deuticke, 1937.

Una colección de ensayos alemanes sobre los aspectos revolucionarios de la ciencia moderna, escritos por matemáticos y físicos bien conocidos. Todos los colaboradores de esta espléndida obra fueron miembros del célebre «Círculo de Viena». La disertación por Hans Hahn es una interesante presentación de algunas de las más asombrosas paradojas de las matemáticas modernas.

MERZ, J. T. *History of European Thought in the 19th Century*, Edimburgo, Blackwood & Sons, 4.ª Edición, 1923.

En esta monumental y siempre leíble obra hay un profundo estudio del desarrollo de las matemáticas en el siglo xix, particularmente estadísticas y la teoría de la probabilidad.

PEIRCE, CHARLES S. *Chance, Love and Logic*. Nueva York: Harcourt, Brace, Inc., 1923.

Una colección de ensayos filosóficos, particularmente sobre el tema de la probabilidad, por uno de los filósofos más distinguidos de América, el fundador del pragmatismo.

POINCARÉ, HENRI. El Valor de la Ciencia.

Todo cuanto escribió Poincaré merece ser leído. La calidad diáfana de su estilo hace que todos sus escritos no técnicos resulten fácilmente comprensibles al lego.

RUSSELL, BERTRAND, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres: Allen y Unwin, 1919.

Una obra clásica, aunque algunas veces difícil de seguir. Ninguna de sus discusiones es fácil, pero Russell es siempre leíble. —. *Mysticism and Logic*. Nueva York: Longmans Green, 1919.

El ensayo «Mathematics and Metaphysicians», de esta colección, está en el mejor estilo de Russell; brillante, atrevido y airoso. Los problemas de las clases infinitas y las paradojas de Zenón están particularmente bien tratados. El ensayo «A Free Man's Worship» es una de las más finas y nobles expresiones de la fe en la ciencia y la razón que se han escrito en idioma inglés.

SMITH, DAVID E. *History of Mathematics.* Vols. I y II. Boston: Ginn & Co. Vol. I, 1923. Vol. II, 1925.

Una buena historia, profusamente ilustrada, muy indicada para el no profesional.

STEINHAUS, *H. Mathematical Snapshots.* Nueva York: G. E. Stechert, 1938.

Relata algunos de los aspectos menos usuales de las matemáticas, incluyendo paradojas. No necesita aprendizaje matemático previo.

SULLIVAN, J. W. N. *Aspects of Science.* 2.ª serie. Londres: W. Collins, Sons, 1926.

Ensayos para servir de estímulo al lego sobre una variedad de temas, incluyendo matemáticas. Recomendamos, por el mismo autor, *Limitations of Science.* Chatio y Windus. Londres, 1933.

SWANN, W. F. G. *The Architecture of the Universe.* Nueva York: The Macmillan Co., 1934.

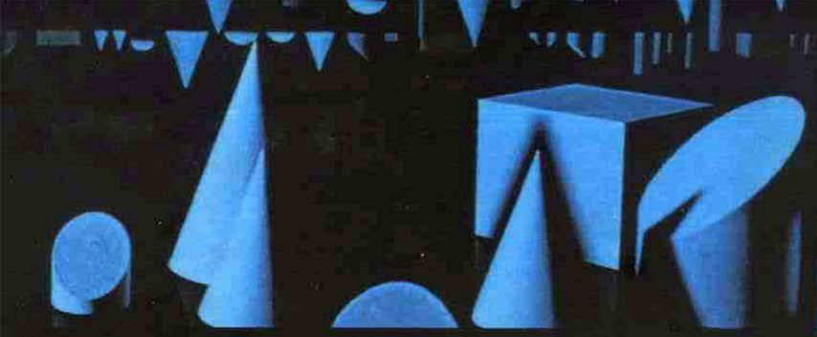
Un físico explica cómo se emplea la probabilidad para estudiar las leyes de los gases. Bien escrito. No técnico.

WHITEHEAD, ALFRED N. *An Introduction to Mathematics.* Nueva York: Henry Holt, 1911.

Podría servir de modelo a todos los libros populares sobre matemáticas. Nada tan bueno apareció antes o desde su publicación. A propósito para el lego, es simple pero no condescendiente, ocurrente, pero libre de «epigramitis», perfectamente claro, informativo, pleno de numen, buen humor y comprensión. Un trabajo de primera clase en todo sentido.

YOUNG, J. W. Fundamental Concepts of Algebra and Geometry, Nueva York: Macmillan, 1911.

Una colección de disertaciones sumamente agradable. Recomendable al neófito.



No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento, pues son a la vez indispensables en los asuntos prácticos y la obra maestra de la abstracción pura. Sin embargo, el matemático suele ser considerado como una especie de ermitaño que invierte su tiempo creando teorías enrevesadas en una jerga árida e ininteligible.

Al concebir este libro, Edward Kasner y James Newman –ambos matemáticos de gran renombre– se propusieron ofrecer una panorámica de los diversos campos de la matemática en un lenguaje comprensible y ameno. El resultado fue un best-seller que se ha convertido en un clásico de la literatura de divulgación científica y que, a buen seguro, despertará –o aumentará– nuestro interés por esta arrogante reina del mundo intelectual.